

FEB 5 1935

6. FOLGE, 1934, BAND 21, HEFT 5

# ANNALEN DER PHYSIK

Gegründet 1790 durch F. A. C. Gren und fortgeführt durch L. W. Gilbert, J. C. Poggendorff, G. und E. Wiedemann, P. Drude, W. Wien

Der ganzen Reihe 413. Band

## Kuratorium:

W. Gerlach	F. Paschen	M. Planck
R. W. Pohl	A. Sommerfeld	M. Wien

Unter Mitwirkung  
der Deutschen Physikalischen Gesellschaft  
herausgegeben von

E. GRÜNEISEN, Marburg/L.  
M. PLANCK, Berlin

Mit 28 Abbildungen im Text



LEIPZIG / VERLAG VON JOHANN AMBROSIUS BARTH

Redaktionsschluß am 22. Dezember 1934

1  
9  
3  
4

XUM

## Inhalt

	Seite
W. Kossel-Danzig-Langfuhr, Zur Energetik von Oberflächen- vorgängen. (Mit 7 Figuren) . . . . .	457
Paul Jäger-Berlin-Siemensstadt, Raumladungsmessungen in Bienenwachs während der Erstarrung und im festen Zustand. (Mit 9 Figuren) . . . . .	481
Arnold Siegert-Leipzig, Der Einfluß der Bindung auf den Wirkungsquerschnitt für Stöße sehr schneller Elektronen . .	503
K. O. Lehmann-Freiburg i. B., Die Dämpfungsverluste bei starken Schallschwingungen in Rohren. (Mit 12 Figuren) . . . . .	533

Für diese Zeitschrift werden grundsätzlich nur Arbeiten angenommen, die vorher weder im Inland noch im Ausland veröffentlicht worden sind. Mit der Annahme des Manuskriptes und seiner Veröffentlichung geht das alleinige Recht der Vervielfältigung, Verbreitung und Übersetzung einschließlich des Rechtes der Veranstaltung von Sonderdrucken auf den Verlag über. Von jeder Arbeit liefert der Verlag 75 Sonderabzüge kostenlos.

1934 erscheinen die Bände 19—21 der 5. Folge. Bezugspreis je Band RM. 28.—, mit Porto RM. 29.20 im Inland, RM. 30.— im Ausland. Mitgliedern der Deutschen Physikalischen Gesellschaft und der Gesellschaft für technische Physik wird ein Vorzugspreis gewährt.

Die Zeitschrift kann durch jede Buchhandlung, in Ausnahmefällen auch durch den Verlag bezogen werden.

Die Redaktion der Annalen wird von den auf der Titelseite genannten Herren besorgt. Es wird gebeten, Manuskripte an Herrn Geh.-Rat Prof. Dr. E. Grineisen, Marburg/L., Mainzer Gasse 33, einzusenden.

Die Redaktion bittet, die Manuskripte **druckfertig** einzuliefern und in den Korrekturen den beim Druck für sie verwendeten Raum nicht zu überschreiten. Die **Zeichnungen** sind in sorgfältiger Ausführung auf besonderen Blättern beizulegen.

Bei den **Zitaten** wolle man die Abkürzungen der Zeitschriftentitel nach dem Verzeichnis wählen, das jedem Jahrgang der „Physikalischen Berichte“ vorangestellt ist.

V  
2  
1

1  
9  
3  
4

XUM

Seite  
457  
481  
503  
533

nen,  
nd.  
das  
ein-  
den  
los.  
und  
lit-  
haft

len

ge-  
rat  
en.  
i in  
zu  
be-

tel  
en

A

5.

ent

des

fläc

bei

Da

kun

Di

Be

ver

mi

ba

un

Di

am

de

en

we

ein

ab

fla

tei

W

för

für

lös

ka

# ANNALEN DER PHYSIK

5. FOLGE, BAND 21, HEFT 5, DEZEMBER 1934

## *Zur Energetik von Oberflächenvorgängen*

*Von W. Kossel*

(Mit 7 Figuren)

### **Einleitung**

Das Problem des wachsenden Kristalls läßt sich von zwei entgegengesetzten Richtungen her anfassen:

Entweder geht man vom fertigen Kristallkörper aus, dessen ideal ebenen Grenzflächen man eine spezifische Oberflächenenergie zuschreibt und betrachtet die Energiewerte, die bei stetigem Vorschieben dieser Flächen ins Spiel kommen. Das ist die von Gibbs begründete klassische Theorie, die wir kurz „Kontinuumstheorie“ nennen wollen. Sie liegt, auf zwei Dimensionen und Randenergie reduziert, auch den neueren Betrachtungen Volmers über Flächenkeime zugrunde.

Oder man geht umgekehrt vom Einzelbaustein aus und verfolgt dessen Anlagerungsschritte: Molekulartheorie.

Die zweite Betrachtungsweise findet, daß die normalen, mit der molekularen Gitterenergie verknüpften, „wiederholbaren“ Anlagerungsschritte in zwangsläufiger Folge von anderen unterbrochen werden, die abweichende Energiewerte liefern. Diese Vorgänge sind scharf lokalisiert. Nur wenige Bausteine am Beginn einer neuen Gitterkette — so weit sich vermöge der Reichweite der Molekularkräfte der Einfluß des Reihenendes geltend macht — zeigen einen Ausfall, alle weiteren werden mit der vollen molekularen Gitterenergie angelagert.

Auch die klassische Auffassung weiß von dem Vorkommen eines Energiedefizits bei Oberflächenvorgängen. Sie knüpft aber an die Gewohnheit an, es am fertigen Körper als „Oberflächenenergie“ gleichförmig auf alle Teile der Oberfläche verteilt zu denken. Daher operiert sie auch beim Problem des Wachstums ohne weiteres so, als verteile sich das Defizit gleichförmig auf das neu angelagerte Material. So berechnet sie für kleine Körper eine merklich verringerte spezifische Ab lösearbeit vom Gitter und — durch deren Einsetzen in bekannte thermodynamische Relationen — erhöhten Dampfdruck,

erhöhte Löslichkeit. Von hier aus kann traditionsgemäß weiter der Weg zu Betrachtungen über Stabilität von Keimen verschiedener Größe und damit zum Kristallwachstum gesucht werden.

So vertraut diese Begriffe erscheinen mögen, so bedenklich ist der Grundgedanke, die Vorgänge am wachsenden Gebäude ganz aus den Verhältnissen an idealen abgeschlossenen Netzebenen oder Netzgeraden herleiten zu wollen. Indem wir frühere Bemerkungen hierüber fortsetzen, stellen wir hier die begrifflichen Elemente der beiden Auffassungen einander noch einmal eingehender gegenüber<sup>1)</sup>. Um das Grundsätzliche ihrer Beziehungen, das von allen Einzelannahmen über Gittertyp und Kraftgesetz unabhängig ist, möglichst durchsichtig erscheinen zu lassen, vermeiden wir es, ein spezielles Gitter, etwa NaCl, anzuwenden, sondern bedienen uns vielfach eines in der Anordnung und im Kraftgesetz aufs äußerste vereinfachten Gitterschemas, auf das wir beide Methoden vergleichend anwenden.

### 1. Wachstum als atomistischer Vorgang

An einem Kristallgebäude, das man in voller Regelmäßigkeit, Schritt um Schritt, Kette um Kette, Fläche um Fläche aufbaut, ist, wie früher gezeigt<sup>2)</sup>, stets höchstens *ein* Punkt, an dem ein Baustein mit der vollen molekularen Gitterenergie angelagert werden kann. Ein solcher Kristall ist daher ein Riesenmolekül mit *einer* reaktionsfähigen Gruppe. Die Ausführung der Reaktion, die Anlagerung eines Bausteins, läßt sofort wieder die gleiche Lage entstehen: der reaktionsfähige Punkt ist lediglich um einen Atomabstand weiter gewandert. Wir nannten daher diesen Einzelvorgang den „wiederholbaren Schritt“. Er liefert, von den Randfällen abgesehen, das volle Kristallgebäude; ihm gehört die, ebenfalls unter Absehen von den Randstörungen festgesetzte, molekulare Gitterenergie zu.

Diese Betrachtungen entsprachen früheren Überlegungen über kleine, begrenzte Atomgruppen<sup>3)</sup>. Für die damalige sehr allgemeine Aufgabe, die Auffassung zu begründen, daß im Periodischen System ein schrittweiser Abschluß von Elektronengruppen stattfinde, war es ebenfalls wichtig, gerade den *Einzelschritt* ins Auge zu fassen. Der geläufigen Auffassung,

1) Erweiterung eines Vortrags im Gauverein Niedersachsen der D. Phys. Ges. (Braunschweig 13. II. 1932; Verh. d. D. Phys. Ges. (3) 13. S. 8. 1932).

2) W. Kossel, Gött. Nachr., Math.-naturw. Kl. 1927, S. 135; Leipziger Vorträge 1928 („Quantentheorie und Chemie“), S. 1.

3) W. Kossel, Ann. d. Phys. 49. S. 229. 1916.

daß das elektrolytische Ion erst beim Verlassen des Moleküls, bei der elektrolytischen Dissoziation seine „Elektroaffinität betätige“, seine Ladung erhalte (Nernst), mußte die neue gegenüberstehen, daß schon innerhalb der Verbindung eine Umgruppierung der Elektronen zu abgeschlossenen Gruppen sich vollziehe, ja, daß die Bildung der Verbindung geradezu auf diesem Vorgang beruhe, der, in heteropolaren Verbindungen, durch den Ladungsaustausch erst die bezeichnenden bindenden Kräfte entstehen lasse. Damit war die Energiebilanz für die Anlagerung des einzelnen Atoms zugänglich geworden und damit die Reaktion der Verbindung und es war u. a. zu zeigen, daß gerade die den älteren Valenztheorien unzugänglichen Grundzüge der Komplexchemie sich hier natürlich ergeben, also als Beweis der neuen Auffassung dienen konnten. Dazu wurden Berechnungen der potentiellen Energien der verschiedenen möglichen Ionenanordnungen angewandt, aus denen sich durch Differenzbildung die Werte für die einzelnen Vorgänge der Zusammenlagerung ergaben.

Analog ist für die Anlagerung oder Ablösung von Gittern zu verfahren. Derselbe Vorgang, der an der Einzelgruppe, die ihn in ungeheurer Vielheit gleichartig zeigt, als chemische Reaktion angesehen wird, heißt hier Wachstum oder Auflösung des Kristalls. Augenscheinlich ist auch hier der Einzelaustausch von Teilchen der Kern dessen, was geschieht.

Für die gesamte Gitterenergie eines Mols des unendlich ausgedehnten heteropolaren Kristalls besitzen wir seit Madelung, Born, Ewald Rechenmethoden und Zahlenwerte, die den oben genannten Energiewerten begrenzter Ionengruppen völlig entsprechen: es sind Berechnungen der potentiellen Energie nach dem Coulombschen Gesetz, auf das unendliche Gitter übertragen und die dort auftretenden Konvergenzschwierigkeiten auf verschiedenen Wegen überwindend. Ihre Wichtigkeit für die Berechnung von Wärmetönungen der fertig vollzogenen Reaktionen ist bekannt.

Allein, da uns gerade das *Entstehen* des Gitters aus Einzelsteinen interessieren muß, weil wir den *Ablauf* der Reaktion betrachten wollen, sind jene auf die Summenwerte fertiger Körper zielenden Rechnungen nicht das, was wir brauchen, — wir müssen von unten auf anfangen und gerade die unvollendeten Vorgänge ins Auge fassen. Zu den bezeichnenden Folgen solcher Betrachtung gehört dann das oben erwähnte Ergebnis: gerade an der *unvollendeten* Kette, die inmitten der *unvollendeten* Netzebene im Entstehen begriffen ist, findet sich der für das Wachstum grundlegende

Schritt, der in dauernder Wiederholung die molekulare Gitterenergie liefert. Man wird durch diesen Aufbau von unten her völlig abgeführt von dem früheren Gebrauch, die Behandlung des Kristalls mit der Betrachtung abgeschlossener Netzebenen oder Netzgeraden anzufangen. Er lag nahe, weil man zuerst Flüssigkeitsoberflächen betrachtet hatte und die molekulare genaue Netzebene als das gegebene Analogon der kapillar glattgezogenen Grenze der Flüssigkeit erschien. Wird aber der einzelne Schritt, als das Element des Vorgangs, vorangestellt, so treten fundamentale Unterschiede zwischen dem Vorgang an der flüssigen und dem an der Oberfläche des Kristalls zu Tage. Während die innere Beweglichkeit der Flüssigkeit die übliche Annahme erlaubt, daß sich nach jeder Ablösung oder Anlagerung eines Moleküls die Oberfläche wieder glatt ziehe, daß also jeder Schritt gleichwertig sei, läßt der Kristall keinen solchen Ausgleich zu. Er zeigt neben dem normalen Wert des wiederholbaren Schritts die eingangs erwähnten Abweichungen und wir nehmen an, daß diese die Häufigkeit der Anlage verschiedener Reihen und Flächen bestimmen und so die Entwicklung der äußeren Gestalt des Kristallkörpers lenken<sup>1)</sup>.

Wird nach dem Grundsatz dieser an die Betrachtung von Molekül- und Komplexbildung anknüpfenden Auffassung der Kristallkörper vom atomistischen Elementarvorgang, der Anlagerung des einzelnen Atoms, aus aufgebaut, so ergibt sich als zweite Stufe die Kette von Atomen, aus Ketten die Fläche, aus Flächen schließlich der körperliche Block.

## 2. Ältere Auffassung: Wachstum als stetiger Vorgang

Das klassische Verfahren ist umgekehrt gerichtet: der älteste Gedanke (Gibbs-Curie) beginnt beim dreidimensionalen Gebilde, er möchte den Gesamtkristall als Form minimaler Oberflächenenergie auffassen. Der nächste Schritt (Gibbs-Volmer-Brandes) geht eine Stufe tiefer, zu zwei Dimensionen herab, behält aber den Grundgedanken bei und sucht, mit analogen thermodynamischen Überlegungen, in der einzelnen Kristallfläche, im Flächenkeim als Form minimaler Randenergie, das Maßgebende für die Gestaltentwicklung zu finden.

Diese Verfahren, die von den Begriffen des Kontinuums, von den Gesetzen großer Massen her zum Wachstumsvorgang vorzudringen suchen, bestechen zunächst sehr durch einen

1) a. a. O.; *Naturw.* **18**, S. 901. 1930; I. N. Stranski in einer Reihe von Arbeiten seit 1928, *Einzelzitate Ztschr. phys. Chem. B*, **26**, S. 100. 1934.

formal befriedigenden Zug: sie liefern Ausdrücke, deren Form erlaubt, sie ohne weiteres in bekannte thermodynamische Beziehungen einzusetzen. Von der angenommenen „Oberflächen“- und „Randenergie“ scheint ein sicherer Weg zum Dampfdruck zu führen. Darauf gründet sich die Hoffnung, von der Verschiedenheit der Dampfdrücke aus, die man für verschiedene Keime berechnet, das Kristallwachstum beleuchten zu können. Das ist der Weg, den Volmer und seine Mitarbeiter in höchst interessanten Diskussionen verfolgt haben<sup>1)</sup>.

Der Verf. hat bereits früher die Bedenken ausgesprochen, die es ihm grundsätzlich unbefriedigend erscheinen lassen, die Keim- und Wachstumsfragen von den großen Dimensionen her mit den dafür zulässigen Kontinuumsbegriffen, wie „Oberflächen-spannung“, entwickeln zu wollen<sup>2)</sup>. Doch tritt Volmer weiter dafür ein<sup>3)</sup> und auch in zusammenfassenden Darstellungen findet sich mitunter<sup>4)</sup> noch die Annahme, daß ein solcher Weg, verglichen mit der Betrachtung der Einzeltorgänge, der strengere sei. Augenscheinlich ist es die thermodynamische Form, die das Zutrauen erweckt, daß hier der Vorgang vollständig erfaßt sei.

Die Bedenken aber, die wir hegen, gehen dahin, daß die Voraussetzungen nicht erfüllt sind, unter denen die angewandten thermodynamischen Beziehungen abgeleitet sind. Ein schärferes Zusehen zeigt, daß eine der grundlegenden, meist als ganz selbstverständlich angenommenen Annahmen der thermodynamischen Methodik, — daß die umgesetzte Energie der umgesetzten Stoffmenge proportional sei, — hier nicht gilt.

Das Wachstum ist für diese Theorie eine stetige Verschiebung der Grenzen von Körpern oder Flächen. Wir nennen sie daher die „Kontinuumstheorie“.

### 3. Die klassische Behandlung des Dampfdrucks am Tropfen

Um ihr Wesen zu betonen, geben wir den Kern der für sie bezeichnenden Behandlung des Gleichgewichtsdrucks am Tropfen.

Beim Verdampfen eines Moleküls verringert sich das Volum und die Oberfläche des Tropfens. Die Zusammen-

1) M. Volmer u. A. Weber, *Ztschr. f. phys. Chem.* **119**, S. 277. 1926; H. Brandes, *das* **126**, S. 196. 1927.

2) Leipziger Vorträge 1928 („Quantentheorie und Chemie“), S. 45.

3) H. Brandes u. M. Volmer, *Ztschr. f. phys. Chem. A*, **155**, S. 466. 1931; vgl. ferner M. Volmer u. W. Schultze, *das*, **156**, S. 1. 1931.

4) *Handb. d. Physik*, hrsg. v. Geiger u. Scheel, 2. Aufl., **XXIV** 2, S. 810.

ziehung der Oberfläche liefert Arbeit und erleichtert dadurch die Verdampfung.

Nimmt der Tropfenradius um  $\Delta r$  ab, so nimmt ab:

$$\begin{aligned} \text{die Oberfläche um } \Delta f &= 8\pi r \Delta r, \\ \text{das Volum um } \Delta v &= 4\pi r^2 \Delta r. \end{aligned}$$

Unser Vorgang definiert primär die Volumveränderung: ein Molekül vom Volum  $\varphi$  wird weggenommen:  $\Delta v = \varphi$ . Von da aus erhalten wir die Oberflächenverminderung, nach dem obigen:

$$\Delta f = \frac{2 \Delta v}{r} = \frac{2 \varphi}{r}$$

und, unter Annahme einer spezifischen Oberflächenenergie  $\sigma$ , die dabei gewonnene Arbeit:

$$\sigma \Delta f = \frac{2 \sigma \varphi}{r}.$$

Um diesen Betrag ist die Verdampfung eines Moleküls aus dem Tropfen erleichtert gegen die aus der ebenen Oberfläche ( $r = \infty$ ). Beim Einsetzen ins Boltzmanntheorem fällt also der Absolutbetrag der Verdampfungsarbeit an der ebenen Oberfläche bei der Differenzbildung heraus und es ergibt:

$$\frac{p}{p_\infty} = e^{\frac{2 \sigma \varphi}{r k T}} = e^{\frac{2 \sigma V_0}{r R T}}$$

( $V_0$  das Molvolum), den wohlbekannten Ausdruck für den Dampfdruck am Tropfen.

Bei so kurzer Form tritt scharf hervor, wie ungeheuer die übliche Ableitung den Prozeß idealisiert: das Volum des abgelösten Moleküls wird auf die ganze Kugel gleichförmig verteilt — als Kugelschale von der Dicke  $\Delta r$ .

Diese Annahme, daß das Material vor und nach dem molekularen Einzeltorgang die Gleichgewichtsform der Kugel annimmt, setzt notwendig voraus, daß es innerlich verschieblich ist, — es muß flüssig sein. Die für den unbefangenen Blick so überaus seltsame Aussage, daß eine Materialeigenschaft wie Dampfdruck oder, was dasselbe heißt, Siedepunkt von der Grobgestalt des Materials (von dem Tropfenradius) abhängen soll, gründet sich ganz auf diese Annahme, daß die Gesamtgestalt dem molekularen Einzelprozeß nachgibt. (Die naheliegende Annahme — der man oft begegnet —, daß die Rechnung den Gedanken benutze, die molekulare Anziehung auf das Einzelteilchen ändere sich mit der Krümmung der Oberfläche, trifft nicht zu. Im angegebenen Gang kommt er nicht vor; das äußere Zeichen dafür ist, daß das  $\sigma$  der Ebene unverändert für die Tropfen benutzt wird.)

Beim festen Körper wird diese bequeme Annahme des Nachrückens im ganzen Material nicht gemacht werden dürfen. Damit fällt die Möglichkeit, alle Änderungen durch die Gleichgewichtsgestalt gehen zu lassen, und damit die Möglichkeit, die Energien der so idealisierten Einzelschritte mit Hilfe der makroskopischen Größe Oberflächenspannung miteinander zu verknüpfen. Damit fällt die übliche Methode, für kleine Körper veränderte Dampfdrucke (Sättigungskonzentrationen) abzuleiten. An die Stelle muß die strenge Auffassung des Wachstums als Molekularprozeß treten, bei dem an ein festes Gitter Stein um Stein angelegt wird. Zwangsläufig treten die energetisch abweichenden Bauschritte auf. Die in der gewohnten thermodynamischen und statistischen Methodik verwandte Annahme, daß die umgesetzte Energie menge der umgesetzten Materialmenge proportional sei — oder, daß die Dichte an zwei Punkten im Phasenraum verglichen werde, zwischen denen ein für alle Teilchen *gleich* verbindlicher Unterschied des Potentials besteht — gilt also bei scharfem Zusehen nicht. Daher unser Eindruck von Unsicherheit bei der unbedenklichen Anwendung der daraus abgeleiteten thermodynamischen Relationen in den genannten Arbeiten.

#### 4. Idealisierter fester Körper. Schachbrettmödell

Um den Punkt, auf den es ankommt, in größter Durchsichtigkeit hervortreten zu lassen, bedienen wir uns eines auf das äußerste vereinfachten Beispiels<sup>1)</sup>. Wir beginnen mit zwei Dimensionen und betrachten ein Schachbrett, das wir wachsen lassen, indem wir Feld um Feld einzeln anlagern. Ein Blick auf den regelmäßig fortlaufenden Prozeß, Fig. 1 oben, zeigt, daß beim Fortbau der Reihen jedes neue Feld mit zwei Kanten an schon vorhandene Nachbarn angelagert wird. Wir wählen die Anlagerungsenergie dieses Vorgangs zur Ein-

Fig. 1

1) Vgl. das 1928, S. 17 benutzte allgemeinere Verfahren, ein Urteil über die Reihenfolge der Anlagerungsenergien durch Abzählung der Nachbarn zu erhalten. Eine Anwendung auf beobachtete Wachstumsformen gab I. N. Stranski, Ztschr. phys. Chem. B, 11, S. 342. 1931 und weitere Arbeiten, zuletzt I. N. Stranski, R. Kaischew u. L. Krasanow, Ztschr. f. Krist. A, 88, S. 325. 1934.

heit. Wir nehmen weiter an, daß mit jeder Bindung an einer Kante die gleiche Energie frei werde. Sie hat demnach in den gewählten Einheiten den Wert  $1/2$ . Beginnen wir nun von unten links mit dem Bau, indem wir zunächst die unterste Kette, dann Stein um Stein die darüberliegende bauen und so fortfahren, notieren wir dabei in jeden Baustein die bei seiner Anlagerung gewonnene Energie, so erhalten wir das in der Figur angegebene Bild.

Der erste Stein lieferte nichts, die weiteren seiner Kette, die nur an einer Kante einen Nachbarn vorfinden, die Energie  $1/2$ , die ersten Steine jeder weiteren Kette desgleichen. Alle weiteren Steine werden an zwei Kanten angelagert, liefern also die von uns als Einheit festgesetzte Energie. Wir sehen, daß sie um so stärker in der Zahl überwiegen, je ausgedehnter das Gebilde wird, sie bilden schließlich praktisch fast das ganze Gebäude. Diesem Vorgang, dem wiederholbaren Schritt des vorliegenden Beispiels, entspricht die molekulare Gitterenergie. Wir haben sie zur Einheit gewählt, um von hier aus zu beleuchten, was am Rande vor sich geht: man hat dort ein Defizit gegen die normale Anlagerungsenergie. Dies Defizit ist nach allgemeiner Meinung maßgebend für die Gestaltentwicklung des Kristalls. Während wir aber glauben, es möglichst scharf in seiner Einzelrolle erfassen zu sollen, verwischt es die Kontinuumauffassung zu einer „Rand“- oder „Oberflächenenergie“, die gleichförmig auf den Zentimeter oder Quadratzentimeter der idealisierten Grenze verteilt wird.

Wir betonen zunächst, daß der wiederholbare Schritt hier genau den gleichen Wert hat, ob er nun an einem kleinen oder einem großen Kristallstück vor sich geht. Die molekulare Ablösearbeit ist am kleinen Stück nicht etwa erleichtert.

An der Zahlenverteilung ändert sich nichts, wenn man es etwa darauf anlegt, die Figur stets einem Quadrat möglichst ähnlich bleiben zu lassen, indem man etwa die durch die Buchstaben und Pfeile angegebene Folge der Fig. 2 ausführt. Solch Wachstum in ähnlich bleibendem Umriß nähert sich in der Form dem üblichen Verfahren der Kontinuumstheorie, die etwa die Kanten eines Quadrates gleichförmig zunehmen läßt. Beginnt man ferner eine neue Reihe nicht am Ende, sondern unterwegs (Fig. 3a), so ist nur die *Lage* des ersten Bausteins eine andere, er liefert aber nach wie vor die verringerte, seine Nachfolger, nach rechts und links bis zu den Rändern, die normale Anlagerungsenergie. Beginnt man ferner eine Reihe an *zwei* Punkten (Fig. 3b), so ergeben beide den

an einer verringerten Anfangsbetrag, die weiteren Schritte sind normal, den Ausgleich liefert der Schlußstein, der nach drei Seiten hin gebunden wird, mit einem abnorm hohen Energiebetrag ( $\frac{3}{2}$ ).

Kehrt man die Vorgänge um, so zeigen Fig. 1 und 3a nach Umkehr der Pfeile, daß der Abbau einer Kette mit normalem Schritt beginnt, wenn man an einer Seite anfängt —

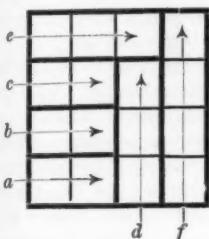


Fig. 2

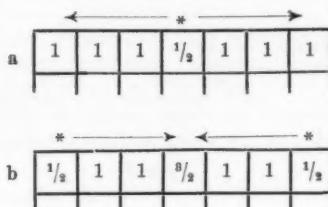


Fig. 3

er endet dann mit einer besonders leichten Ablösung, da der letzte Stein nur noch an einer Seite hängt. Um aber (3b) den Abbau irgendwo *mitten* in der Kette zu beginnen, muß für das Herausreißen des ersten Steins *mehr* als die molekulare Gitterenergie geleistet werden — man hat die an speziellen Fällen (NaCl-Gitter, allgemeines homöopolares) betrachtete schwere Verletzbarkeit abgeschlossener Ketten vor sich. Zugleich erläutern die beiden ersten Fälle, daß nicht, wie oft (schon bei Gibbs) vorausgesetzt wird, der Eckbaustein ohne weiteres eine geringere als die mittlere Ablösearbeit zeigt. Dieser Zug (der auch zur Erläuterung der Rundung von Kristallkanten gern herangezogen wird) ist also nicht allgemein und selbstverständlich, sondern schon eine Frage des speziellen Kraftgesetzes. Hingegen ist es ein allgemeiner Zug, daß der erste Angriff auf einen Punkt inmitten einer Kette, den wiederholbaren Schritt, den Abbau am laufenden Ende der Kette, an Energiebedarf übertrifft. (Wir sehen dabei natürlich von Fällen ab, die überhaupt keinen isograden Aufbau erlauben, wie etwa dem formal möglichen Verfahren, ein Ionengitter abwechselnd aus Ketten nur negativer und nur positiver Ionen entstehen zu lassen. Solche Bauverfahren sind zwar formal möglich, es ist aber nicht anzunehmen, daß sie mit ihren extremen Potentialwerten je eine Rolle im wirklichen Geschehen spielen.)

## 5. „Randenergie“

Wir kehren zum Aufbau zurück und bemerken ferner, daß stets nur der erste Schritt einer Kette den Umfang der Gesamtfigur vergrößert

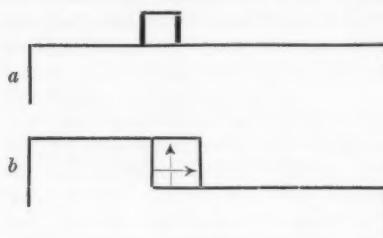


Fig. 4

(Fig. 4a, stärker ausgezogene Kanten). Der wiederholbare Schritt hingegen vergrößert den Umfang nicht, er verschiebt nur einen Teil davon (Fig. 4 b). Die häufigsten, die mit der molekularen Gitterenergie verknüpften Schritte des Wachstums also sind ohne Ein-

fluß auf die Ausdehnung der Grenze gegen die Umgebung. Man übersieht sofort, daß das für beliebige Gitter gilt.

Nur der Vorgang, der bei der Energielieferung zurückbleibt, liefert eine Vergrößerung des Umfangs. Was Rand bildet, hat nicht zur Bindung benutzt werden können, sein Energiebeitrag fehlt. Man liest am Vergleich der beiden Figuren unmittelbar ab, daß der Ausfall einer Bindung eine Verlängerung des Gesamtumfangs um zwei Kantenlängen bedeutet. Das gesamte Defizit in einem Gebäude von  $n$  Steinen, das dadurch eintritt, daß sie nicht alle in wiederholbaren Schritten angelagert werden, nicht alle die molekulare Gitterenergie liefern können, ist also der Randlänge proportional, — ein Ergebnis, das wir zunächst in genauem Zusehen auf die Energielieferungen der verschiedenen einzelnen Anlagerungsschritte erhalten haben.

In summarischem, gleich den fertigen Körper betrachtendem Verfahren kann dies so hingestellt werden:

Aus  $n$  Teilchen sei irgendeine Figur gebildet. Die Zahl der verbundenen Kanten sei  $v$ , die der unverbundenen, die den Umriß der Figur bilden, sei  $u$ .

Dann ist

$$v + u = 4n.$$

Bei jeder Bindung werden zwei Kanten miteinander verknüpft, die Zahl der Bindungen ist also  $v/2$ . Das doppelte der Energie einer solchen Bindung werde als Einheit normiert, jede Bindung

liefert also die Energie 1/2. Demnach ist die gesamte bei der Bildung der Figur freigewordene Energie:

$$E = \frac{1}{2} \cdot \frac{v}{2} = n - \frac{u}{4}.$$

Sie setzt sich also aus einem mit der Zahl der Bausteine proportionalen positiven und einem der Länge des Umfangs proportionalen negativen Posten zusammen. Den ersten nennen wir „Gitterenergie“, den zweiten „Randenergie“.

Augenscheinlich kann eine „spezifische“, auf eine Einheitsmenge bzw. auf die Einheit der Randlänge bezogene Energie für beide Formen ohne weiteres angegeben werden.

Formal kann dieser Zusammenhang auch so hingestellt werden, als sei die Gitterenergie tatsächlich geleistet, von ihrem Gesamtbetrag

$$n = E + \frac{u}{4}$$

sei aber nur der Anteil  $E$  frei geworden, während der Teil  $\frac{u}{4}$  in Form einer neuen Energieart, einer der Randlänge proportionalen potentiellen Energie, eben der „Randenergie“, aufgespeichert worden sei. Indem das Defizit so zur Würde einer besonderen, im Rande lokalisierten, potentiellen Energie erhoben wird, erreichen wir die geläufige Ausdrucksweise.

Dieser Begriff der Randenergie ist am anschaulichsten, wenn man verschiedene Anordnungen der gleichen Bausteine vergleicht. Bei Übergang von großem zu kleinem Umfang wird Energie frei, weil mehr Bausteine einander fassen — formal, aber quantitativ richtig kann man das so darstellen, als röhre sie aus dem angenommenen Vorrat an potentieller Energie her, der im Rande sitze und mit dessen Verkürzung herabgehe. Ja man kann, da der freiwerdende Energiebetrag der verschwundenen Randlänge proportional ist, versucht sein, sich diese Länge als den Weg zu denken, längs dessen eine konstante „Randspannung“ gewirkt und so die beobachtete Arbeit zustande gebracht habe.

Man bemerkt aber, daß dieser Begriff nur dann einen Sinn hat, wenn es sich nicht um einen bloßen *Vergleich* der Lagenergien zweier Formen handelt, sondern die beiden in der Tat stetig ineinander übergeführt werden können. Der Ausdruck für eine generalisierte Kraft kann leicht formal gebildet werden, indem man einen Energieausdruck nach einer Lagengröße ableitet — ob diese Form aber einen Sinn hat, hängt davon ab, ob die Lagengröße in der Tat in einem möglichen Vorgang als stetige Variable auftreten kann. Hier ist es nicht

der Fall. Die benutzte Lagengröße, die Rendlänge  $u$  des festen kristallinen Gitters, kann freilich durch Umbau in eine andere Anordnung geändert werden, — diese Umlagerung der Steine ist aber ein ganz anderer Vorgang, als eine stetige Verkürzung des Randes, längs dessen eine immer gleich bleibende Randspannung wirkte. Man ist an solche Vorstellungen von der Flüssigkeit her gewohnt, deren innere Verschieblichkeit den Anschein stetigen Überganges zwischen nahestehenden Formen erlaubt. Diese Gewohnheit darf aber nicht darüber hinwegtäuschen, daß der Begriff nur summarische Bedeutung haben kann und seine Brauchbarkeit sich verflüchtigen muß, sobald man mit atomistischen Dimensionen zu tun bekommt. Da wir hier einem Begriff aus der Klasse der „Oberflächenspannung“ zum ersten Mal in durchsichtigster Form und Herkunft begegnen, ist der Ort, die Grenzen seiner Brauchbarkeit scharf hervorzuheben.

Er hat durchaus nur einen Sinn, falls an eine Verschieblichkeit des Materials gedacht werden darf, die neue Teilchen an den Rand treten läßt. Von einer etwaigen Spannung längs des Randes, welche die Teilchen — ohne Änderung ihrer Zahl und Folge — näher aneinanderzurücken suchte, muß diese „Randspannung“, die allein ein anderer Ausdruck für die „Randenergie“ ist, scharf unterschieden werden. Das hat bereits Gibbs<sup>1)</sup> sehr klar hervorgehoben — die eine Größe betreffe die Arbeit bei der Dehnung, die andere die bei der Bildung des Randes — und weiter bereits durch den Hinweis sehr lebendig gemacht<sup>2)</sup>, daß in einer Kristallfläche die eine Größe — die wirkliche, durch Gewichte äquilibrierbare Spannung längs der Oberfläche — von der Richtung abhängen könnte, während die andere — die aus der Bildungsarbeit der Oberflächen-einheit hergeleitete „Oberflächenspannung“ — mit Richtungen nichts zu tun habe. Der verführerisch anschaulich anmutende Ausdruck „Oberflächenspannung“ bringt aber, wie das Schrifttum zeigt, immer wieder die Gefahr mit sich, daß die etwa aus der Trennarbeit berechnete spezifische Oberflächenergie einer Kristallfläche ohne weiteres als ein Maß für Kräfte angesehen wird, die längs der Oberfläche wirkten (etwa: sie in Einzelschollen zu zerreißen suchten). Eine solche Äquivalenz ist, wie schon Gibbs zeigt, nur bei Flüssigkeiten selbstverständlich.

1) J. W. Gibbs, *Thermodynamische Studien*, übers. v. Ostwald, Leipzig 1892, S. 369.  
2) a. a. O., Anm. 1.

Wir heben nach Betrachtung dieser Umformungen noch einmal das Unmittelbare hervor: es handelt sich bei allem dem immer um das Defizit an Bildungsenergie, das daher röhrt, daß ein Atom am Rande nicht so viel Nachbarn hat wie eines, das im regulären Fortbau im Inneren des Gebäudes untergebracht wird. Indem wir Bemerkungen über die daraus folgenden Beziehungen zwischen Gitter- und Oberflächenenergie am dreidimensionalen Gebäude auf einen späteren Abschnitt zurückstellen, betrachten wir zunächst in der Einfachheit, die das benutzte Modell zuläßt, den Punkt, in dem die eingangs erwähnten gegensätzlichen Auffassungen einander am unmittelbarsten begegnen:

6. Wie läuft die Energieentwicklung ab, wenn ein Kristall wächst?

Nach der *Molekulartheorie* springt der Energiegewinn beim Bauen zwischen den normalen, am großen wie am kleinen Körper gleichen Werten des wiederholbaren Schritts immer wieder zu veränderten Werten, sobald es nötig ist, einen Stein in abnormer Lage (den ersten einer Kette etwa) anzufügen.

Fig. 5, Linienzug *A*, zeigt die Folge der Energiegewinne: Als Beispiel ist der Fall gewählt, daß ein Flächenkeim so wächst, daß er sich stets der Form eines Quadrats möglichst nahe hält, also in der in Fig. 2 angegebenen Folge. Zwischen den wiederholbaren Schritten, deren Energie wir zu 1 normiert haben, zeigen sich immer wieder die des Reihenbeginns mit dem vermindernden Energiegewinn. Auf diese Unterschiede schieben wir die Neigung des festen Gitters, abgeschlossene Netzgeraden (Netzflächen) (also „Kristallgestalt“) zu zeigen, die hohe Empfindlichkeit der Gestaltentwicklung gegen Verunreinigungen u. a. m.

Die *Kontinuumstheorie* hingegen betrachtet, wie oben am Tropfen kurz erinnert wurde, das *stetige* Größerwerden einander ähnlich bleibender Körper. So wird auch für den „Flächenkeim“ verfahren. Man fragt hier, wie früher nach der wachsenden Kugel, nach dem wachsenden Quadrat. Welche Energie wird frei, wenn die Quadratkante  $a$  um  $da$  wächst? Es ist dabei eine Vergrößerung der „Randenergie“ aufzubringen, die als Produkt einer „spezifischen freien Randenergie“ und der Randverlängerung ( $2 da$ ) berechnet wird. Man behandelt den gefundenen Ausdruck als stetige Funktion von  $a$  und berechnet daraus durch Differenzieren die Anlagerungsenergie pro Mol oder Molekül, die man in den thermodynamischen Ausdruck für den Dampfdruck einsetzt. Die Anlagerungsenergie wird natürlich ebenfalls zur stetigen Funktion der Körpergröße und

nähert sich mehr und mehr einem Grenzwert, der Dampfdruck fällt entsprechend.

Die Rechnung lässt sich nur durchführen, wenn man einen glatten Rand hat, dessen Randspannung man angeben kann. Daher wird mit quadratischen (oder rechteckigen) Netzkeimen operiert, deren Kanten abgeschlossene Netzgeraden sind. Auf diese Weise ahmt man die molekulär glattgezogene Oberfläche des Tropfens nach. Im *wirklichen* Wachstum eines festen Gitters sind die Augenblicke, in denen gerade alle Ränder abgeschlossene Netzgeraden zeigen, nur einzelne Stationen. An diese aber wird hier, ihrer formalen Berechenbarkeit halber, die ganze Gleichgewichtsüberlegung angeknüpft.

Wir betrachten den Kern des dabei üblichen Rechenverfahrens an unserem Modell. Da man sich nur aufeinander ähnliche, von geschlossenen Netzgeraden eingegrenzte Figuren beschränkt, so ist auch der Umfang  $u$  eine bestimmte Funktion der Bausteinanzahl  $n$ . Wir kennen also in der gesamten Bildungsenergie

$$E = n - \frac{1}{4}u$$

auch den zweiten Posten, die „Randenergie“, — die gesamte Bildungsenergie ist unter der Annahme einander ähnlich bleibender Figuren eindeutige Funktion von  $n$ .

Beim Quadrat (dem wichtigsten Fall der Volmer-Brandesschen Überlegungen) wird, da  $u = 4\sqrt{n}$ :

$$E = n - \sqrt{n}$$

$$= n - n^{1/2}.$$

Gibt man nun, wie üblich, der Versuchung nach, die Energie, die bei der Hinzufügung eines Bausteins frei wird, heraus, wie aus einer stetigen Funktion von  $n$  berechnen zu wollen, so erhält man:

$$E_{(1)} = \frac{dE}{dn} \cdot 1 = 1 - \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

So bekommt man für:

$n = 4$	$9$	$100$	$10000$
$E = 1 - \frac{1}{4}$	$1 - \frac{1}{6}$	$1 - \frac{1}{20}$	$1 - \frac{1}{200}$
$= 0,75$	$0,833$	$0,95$	$0,995$

usf.

Die Arbeit für den Einzelschritt nähert sich laut dieser Bezeichnungsweise um so mehr dem Grenzwert 1, je größer das

ganzes Gebäude schon geworden ist. Die Fig. 5 zeigt ihren Verlauf (Linienzug *B*). Es ist völlig das vom Flüssigkeitstropfen gewohnte Bild: die Anlagerungsarbeit jedes einzelnen Bausteins ist um so kleiner, der einzelne Baustein ist um so leichter ablösbar, je kleiner das Gebäude. Die Figur, an der wir die tatsächliche Folge der Einzelschritte (*A*) eingetragen

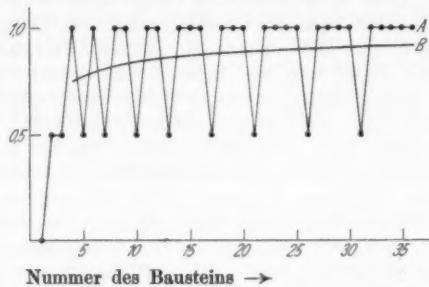


Fig. 5. Energientwicklung am „wachsenden Schachbrett“. *A* nach der Molekulartheorie; *B* nach der Kontinuumstheorie

haben, enthält nun auch, in unmittelbarer Gegenüberstellung, den stetigen Anstieg der Ablösearbeiten (*B*), den die eben geschilderte, an die singulären Fälle der abgeschlossenen Figuren anknüpfende Berechnungsweise vortäuscht.

Volmer<sup>1)</sup> hat, indem er auf die Überlegungsweise des Verf. einging, daran vermißt, sie „berücksichtige nicht, daß mit der Anlagerung des ersten Moleküls die Keimbildungsschwierigkeiten noch nicht verschwunden sind, vielmehr jedes weitere hinzukommende Molekül ein neu hinzukommendes Defizit gegenüber der Gitterenergie mit sich bringt“. Der Unterschied der Anschauungen ist damit ausgezeichnet getroffen. Die traditionelle Kontinuumsmethodik prägt, wie wir eben gesehen haben, den Eindruck, daß jedes einzelne hinzukommende Molekül mit einem Defizit angelagert werde, sogar einem Gegenstand auf, für den wir durch Annahme einfachsten Aufbaus und Gesetzes die für ein Gitter bezeichnende sprunghafte Ungleichheit der Anlagerungsarbeiten von vornherein festgesetzt hatten. Die gewohnte Vorstellung entsteht also durch den Formalismus, der auch ein in Wirklichkeit nur bei bestimmten Einzelschritten entstehendes Defizit stetig auf alle

1) H. Brandes u. M. Volmer, Ztschr. f. phys. Chem. A, 155. S. 470. 1931.

Nachbarn verteilt. Für die tatsächlichen Einzelveorgänge darf die so entstandene Stetigkeit nicht angenommen werden.

Wie stark dieser Formalismus der Kontinuumstheorie die wirklichen Vorgänge verwischen muß, zeigt sich auch an den Einzelzügen seiner Anwendung. Um z. B. die Randspannung längs einer Gittergeraden an einem Netzebenenkeim des NaCl zu erhalten<sup>1)</sup>, muß eine Netzebene längs einer Gittergeraden aufgetrennt gedacht, die Trennarbeit für die Längeneinheit berechnet werden. Dies geschieht unter Anwendung der Coulombschen Potentiale der Ionen, man benutzt die Konvergenz für eine unbegrenzt lange Kette und reduziert dann auf den Zentimeter. Der so gewonnene spezifische Wert für die Längeneinheit wird nun aber auf die Ränder *wachsender Keime* angewandt, d. h. auf Kettenstückchen, die anfangs nur wenige Atome enthalten können. Die Anlagerungsenergien sind hier in Wirklichkeit, stark hin und her springend<sup>2)</sup>, noch weit von dem entfernt, was man als Grenzwert unendlicher Ketten berechnet, und doch soll das ganze Verfahren gerade dazu dienen, die Abweichungen kleiner Keime von großen darzustellen. Auch hier ist die Behandlung als Kontinuum, das einfach für jedes Randstück eine mit dessen Länge proportionale Randenergie zeige, an dem Mangel innerer Folgerichtigkeit schuld.

Ganz scharf ist von diesem in der Rechenmethodik begründeten Zuge die Frage nach der *Reichweite* der Molekularkräfte zu unterscheiden. Man darf nicht etwa annehmen, der Widerspruch erledige sich dadurch, daß die Molekularkräfte über mehrere Bausteine wegreichten und schon deswegen das Defizit des Reihenbeginns sich nicht auf den ersten Baustein beschränken, sondern über mehrere hinweg sich geltend machen müsse. Wir haben freilich, um die Gerüste der beiden Überlegungsweisen unverhüllt nebeneinander zu stellen, das denkbar einfachste Kraftgesetz gewählt, indem wir die Anziehung auf den unmittelbaren Nachbar beschränkten. Damit beschränkt sich die Anlagerungshemmung streng auf den ersten Baustein und die Verwischung über alle Bausteine, die von der Kontinuumsmethodik vorgenommen wird, tritt am schärfsten hervor. Sie ist aber grundsätzlich ebenso zu beurteilen, wenn das Kraftgesetz schwächer abfällt oder auch die Oszillationen der Anlagerungswerte einer Ionen-

1) Vgl. z. B. H. Brandes, a. a. O., S. 204; H. Brandes u. M. Volmer, *Ztschr. phys. Chem. A*, 155, S. 466. 1931.

2) Vgl. z. B. Quantentheorie u. Chemie, Fig. 7, S. 27.

ge dar  
orie die  
an den  
spannung  
es NaCl  
geraden  
neinheit  
ng die Kon  
vert dann  
Wert für  
chsender  
ngs nur  
energien  
, noch  
endli  
erfah  
me v  
als Kon  
a Länge  
innerer  
methodik  
r Mole  
nehme  
molekular  
on des  
uf den  
hinweg  
um die  
benein  
gewählt,  
Nachbar  
mmung  
er alle  
ommen  
sätzlich  
abfällt  
Ionen-  
des u

kette zeigt: der strengen atomistischen Auffassung gegenüber ist sie nicht haltbar.

Formal mag es vielleicht auf den ersten Blick bedauerlich erscheinen, daß mit dem Wegfall der Proportionalität zwischen umgesetzter Stoffmenge und umgesetzter Energie, die nach der gewohnten Rechenweise zu bestehen schien, die gewohnte Unterlage für die Anwendung thermodynamischer Relationen, etwa die gewohnten Dampfdruckberechnungen, für eine strenge Auffassung weggezogen ist. Je mehr man sich indes in den Gegenstand des Stoffaustauschs am festen Körper vertieft, desto lebendiger und selbstverständlicher erscheint es, daß die für große Massen geschaffenen Begriffe der Thermodynamik inmitten der einander gegenseitig bedingenden atomistischen Einzelvorgänge am festen Körper nicht ausreichen.

Schon früher ist diese Lage betont und als Beispiel dafür angeführt worden, daß ein Potential für den Austausch von Bausteinen an einer geschlossenen Netzebene nicht einmal definierbar ist<sup>1)</sup>. Denn die Ablösung eines Bausteins aus der geschlossenen Ebene fordert mehr, die Auflagerung eines Bausteins auf sie liefert weniger als die molekulare Gitterenergie. Es ist also nicht möglich, ein Potential, d. h. den der Umsetzung einer Einheitsmenge zugeordneten Energiebetrag, der für die Umgebung des betrachteten Zustandes gilt, anzugeben: der Zustand der abgeschlossenen Netzebene ist ein singulärer, an dem gerade ein Sprung der Anlagerungsarbeit liegt. Die schon öfters gestellte Frage, ob zwischen den verschiedenen Flächen eines Metallkristalls eine Potentialdifferenz gegeneinander zu erwarten sei, ist also grundsätzlich verwickelter, als die Bestimmtheit ihrer Form zunächst vermuten läßt.

Die experimentellen Befunde über Vorgänge an festen Oberflächen sprechen, wie dem Verf. scheint, durchaus für die Notwendigkeit solch eingehenderer Betrachtungsweise, wie sie hier besprochen wird. Wir beschränken uns hier auf den Hinweis, daß Versuche, die als Stütze für die von der Kontinuumstheorie abgeleitete Abhängigkeit der Löslichkeit von der Teilchengröße angeführt zu werden pflegen, dem Urteil ausgezeichneter Sachkenner nicht als beweiskräftig gelten<sup>2)</sup>.

1) K. H. Kreuchen, Ztschr. phys. Chem. A, 155, S. 161, insbes. S. 174. 1931.

2) G. Bakker, Kapillarität; Handb. d. Experimentalphysik, hrsg. v. W. Wien u. F. Harms, VI. S. 265. 1928.

7. **Räumliches Gitter; Gitterenergie und Oberflächenenergie**

Setzt man das Schachbrettschema in den Raum fort, verwendet Würfel,  $n$  an der Zahl, so ist die Zahl der verbundenen ( $v$ ) und der freien Flächen ( $f$ ) zusammen:

$$v + f = 6n.$$

Da in jeder Bindung zwei Flächen vereinigt sind, wird die Zahl der Bindungen:

$$\frac{v}{2} = 3n - \frac{f}{2}.$$

Beim wiederholbaren Schritt werden drei Flächen des neuen Steins an Nachbarn gelagert. Wird seine Energie wiederum zur Einheit gewählt, so erhält die Energie einer Bindung zwischen Nachbarflächen den Wert  $\frac{1}{3}$  und die Bildungsenergie eines Gebäudes von  $n$  Steinen wird:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{v}{2} = n - \frac{f}{6}.$$

Das der Oberfläche ( $f$  Würffelflächen) proportionale Defizit gegen den der Zahl der Steine selbst proportionalen Betrag heißt üblicherweise „Oberflächenenergie“.

Um diesen fehlenden Anteil der Gitterenergie mit der dafür geläufigen Ausdrucksweise in Zusammenhang zu bringen, bezeichnen wir die Kantenlänge des Bausteins mit  $\delta$ , die Oberfläche des ganzen Gebäudes mit  $F$ , den Rauminhalt des ganzen Gebäudes mit  $V$ , den bisher als Einheit behandelten Energiewert des wiederholbaren Schritts, die molekulare Gitterenergie, mit  $q$ , die molare Gitterenergie mit  $Q$ , das Molvolum mit  $V_0$ , die Gitterenergie der Raumeinheit mit  $Q_1$ . Es gilt:

$$f \delta^2 = F, \quad \text{also} \quad f = \frac{F}{\delta^2},$$

$$n \delta^3 = V, \quad \text{also} \quad n = \frac{V}{\delta^3}.$$

Demnach wird die Bildungsenergie:

$$\begin{aligned} E &= q \left( \frac{V}{\delta^3} - \frac{F}{6\delta^2} \right) \\ &= \frac{q}{\delta^3} \left( V - \frac{1}{6} F \delta \right) = \frac{Q}{V_0} \left( V - \frac{1}{6} F \delta \right) \\ &= Q_1 V - \frac{1}{6} Q_1 \delta \cdot F. \end{aligned}$$

Nach der geläufigen Ausdrucksweise ist aber das Defizit rechts, die „Oberflächenenergie“,  $= \sigma F$ , wo  $\sigma$  die „spezifische

gie  
ver-  
ver-  
1 die  
euen  
erum  
ndung  
ergie  
  
efizit  
etrag  
  
der  
gen,  
die  
des  
solten  
olare  
Mol-  
Q.  
  
fizit  
che

Oberflächenenergie“ oder „Oberflächenspannung“. Demnach wird:

$$\sigma = \frac{1}{6} Q_1 \delta .$$

Die Oberflächenenergie der Flächeneinheit ist gleich  $1/6$  der Gitterenergie, die in einem Raum der Grundfläche 1 und der Höhe eines Bausteins enthalten ist. In der Tat ist ja von den 6 Bindungen, die jeder Baustein inmitten des Gitters betätigt, für die Moleküle der äußersten Schicht *eine* unbetätigt geblieben, die nach außen zeigende. Da die „Oberflächenenergie“ nichts anderes ist als dieser Ausfall, erlaubt diese Überlegung, die letzte Gleichung ohne alle vorherigen hinzuschreiben, — den kürzesten Ableitungsweg.

Zugleich führt diese summarische Gestalt der Betrachtung, bei der jeder Stein der Oberfläche gleichmäßig am Ausfall beteiligt erscheint, unmittelbar wiederum vor Augen, woher die Versuchung röhrt, anzunehmen, daß auch beim Wachsen jeder neu außen angelagerte Stein gleichmäßig am weiteren Wachsen des Ausfalls, am Wachsen der „Oberflächenenergie“ beteiligt sein müsse.

Die tatsächliche Folge entspricht dem früher für das ebene Beispiel Besprochenen und kann für unser einfaches Schema in Analogie dazu sehr kurz ausgedrückt werden. Fig. 6 entspricht Fig. 1. Der Hauptteil der neuen Steine wird ohne jedes Defizit, mit der vollen molekularen Gitterenergie, im wiederholbaren Schritt angelagert. Nur die ersten Steine der Ketten, der Übersicht halber wieder einfach an den Rand gelegt, sind an zwei statt an drei Seiten gebunden und liefern daher nur  $2/3$  der molekularen Gitterenergie. Das Defizit bei jedem solchen abnormen Schritt ist also  $1/3$ . Zugleich vergrößern wiederum nur diese abnormen Schritte die Oberfläche und zwar, wie in der Figur hervorgehoben, um zwei Würfelflächen, also um  $2 \delta^2$ . Der Verlust, auf die Flächeneinheit neu gebildeter Oberfläche bezogen, ist also:

$$\frac{1/3 Q}{2 \delta^2} = \frac{1}{6} \frac{Q_1 \delta^3}{\delta^2} = \frac{1}{6} Q_1 \delta ,$$

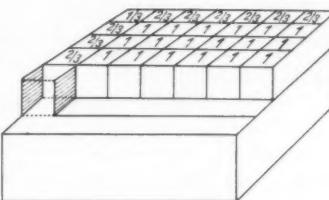


Fig. 6

womit wieder der Ausdruck für die spezifische Oberflächenenergie erreicht ist, dieses Mal aber, während des Wachstums beobachtet, als das Ergebnis bestimmter *einzelner* unter den Anlagerungsvorgängen, die zugleich Defizit und Oberflächenvergrößerung bringen, während die große Mehrzahl der Bau- steine bei ihrer Anlagerung weder Oberfläche noch Oberflächen- energie vermehrt.

**8. Der Zahlenkoeffizient in der Beziehung zwischen Volum- und Oberflächenenergie. Der Stefan'sche Satz als Grenzgesetz**

Der Koeffizient der betrachteten Beziehung hängt von der Anordnung der Teilchen und dem zwischen ihnen herrschenden Kraftgesetz ab. Den Wert  $1/6$  erhielt man bei der denkbar einfachsten Verteilung der bindenden Kräfte auf die Koordinatenrichtungen eines Kartesischen Systems für das einfache Würfelmuster. Für eine von der dichtesten Ebene begrenzte dichteste Kugelpackung erhält man, wenn man sich ebenfalls auf die berührenden Nachbarn beschränkt,  $\frac{1}{\sqrt{24}}$ , also etwas mehr als  $1/5$ .

Sind die Nachbarn in größerem Umkreise zu beachten, so steigt der Koeffizient. Völlig eindeutig ist seine Grenze nach oben. Sie ist gegeben durch die bekannte Stefan'sche<sup>1)</sup> Annahme, nach der für die Verbringung eines Moleküls „in die Oberfläche“ dieselbe Arbeit zu leisten sei, wie für seine Verdampfung von dort, und ergibt den Faktor  $1/2$ .



Fig. 7

Diese Annahme entspricht nämlich dem Grenzfall, dem man sich nähert, wenn die Reichweite der molekularen Kräfte groß ist gegen die Ausdehnung des Moleküls. Man sieht das anschaulich, wenn man das mitunter zur Begründung der Stefan'schen Annahme angeführte Schema Fig. 7a, bei dem das Molekül, um seine halbe Ablösung auszudrücken, inmitten

1) J. Stefan, Sitzber. d. k. Ak. d. Wiss. zu Wien II, Bd. 94. 1886; Wied. Ann. 29. S. 655. 1886.

einer mathematischen Grenzfläche schwelt, mit dem Fall Fig. 7 b vergleicht, in dem es noch als wirklicher Baustein der letzten Molekularschicht selbst angehört. Der zweite Fall geht in den ersten über, wenn man die Grenzschicht in der Dicke des halben Atomdurchmessers fortnimmt. Die Stefansche Annahme trifft also zu, wenn diese Schicht nur einen verschwindenden Anteil zur gesamten Ablösearbeit des Moleküls beiträgt. Das wird erfüllt, wenn die an der Arbeitsleistung beteiligten Molekularkräfte aus einem so großen Raumbereich stammen, daß die betrachtete Schicht nur einen verschwindenden Teil davon ausmacht<sup>1)</sup>. Ihre Reichweite muß also groß sein gegen die Atomdimensionen.

Der Stefansche Satz ist also ein Grenzgesetz, das in seiner Definiertheit grundsätzlich interessant ist, von dem aber wohl alle wirklich vorkommenden Fälle weit entfernt bleiben. Für van der Waalssche Kräfte ist es geläufig, daß ihre Reichweite über wenige Atomabstände nicht hinausgeht. Für Ionengitter erhalten wir ein Beispiel im Rahmen einer allgemeineren Überlegung.

Man übersieht die Bedeutung der Stefanschen Annahme noch einmal von anderer Seite, wenn man von früheren Betrachtungen über die molekulare Anlagerungsenergie an einem Kristall ausgeht<sup>2)</sup>. Diese kann stets aus drei Beiträgen aufgebaut werden; nämlich aus der Anlagerung des neuen Bausteins an die gerade in Fortbau begriffene Kette:  $\Phi'$ ; neben den bereits vollendeten Teil der gerade in Fortbau begriffenen Netzebene:  $\Phi''$ ; auf den darunter bereits vorhandenen Block:  $\Phi'''$ ; Zusammen ergibt also der wiederholbare Schritt:

$$\Phi_0 = \Phi' + \Phi'' + \Phi'''.$$

Wiederholt man jedes dieser drei Gebilde auf der anderen Seite des Bausteins noch einmal, so wird er völlig ins Gitter eingeschlossen. Die Energie, ihn von dort herauszuholen, wäre also  $2\Phi_0$ . Das ist die *eine* Endlage, von der der Stefansche Satz spricht, die Lage „im Inneren“ des Materials. Von dort soll es ebensoviel Arbeit kosten, ihn „an die Oberfläche“ des Materials zu bringen, wie, ihn von dort ganz abzulösen. Für jeden dieser beiden Schritte ist

1) In den aus einem Abstand  $r$  stammenden Beiträgen röhrt aus der Schicht (Dicke  $\delta/2$ ) der Bruchteil  $\delta/2r$  her. Es verschwindet, wenn der überwiegende Anteil des Integrals aus Bereichen stammt, für die  $r \gg \delta$ .

2) a. a. O. 1927.

also nach dem Stefanschen Satz der Wert  $\Phi_0$  zu erwarten. Der Lage „an der Oberfläche“ kommt aber in der Tat die Ablösearbeit

$$2\Phi' + 2\Phi'' + \Phi''' = \Phi_0 + \Phi' + \Phi''$$

zu, — denn der Baustein gehört ja dabei der vollständigen äußersten Schicht an. Die Stefansche Annahme kann also nur gelten, falls  $\Phi' + \Phi'' < \Phi_0$  oder, was dasselbe heißt,  $\Phi' + \Phi'' < \Phi'''$ .

Damit ist wiederum die früher betrachtete Forderung erreicht, daß der Beitrag aus der Molekülschicht, der das Teilchen angehört, gegen den aus dem darunterliegenden Material verschwindend klein sein muß, falls die Stefansche Beziehung gelten soll.

Nun ist aber z. B. für die Würfelebene des Steinsalzgitters — wir beschränken uns auf die Beiträge der Ionenladungen —:

$$\Phi' = 0,6931 \quad \Phi'' = 0,1144 \quad \Phi''' = 0,0662,$$

es ist also ganz im Gegenteil  $\Phi' + \Phi'' > \Phi'''$ . Der Zahlenfaktor unserer Beziehung zwischen Gitterenergie der Volumeneinheit, Oberflächenenergie der Flächeneinheit und Atomdurchmesser wird hier

$$\frac{\Phi''}{2\Phi_0} = \frac{0,0662}{1,7476} \sim \frac{1}{26},$$

man ist also hier vom Stefanschen Grenzfall besonders weit entfernt.

Man könnte diesen Koeffizienten als die „Offenheit“ des Kraftfeldes an der Oberfläche bezeichnen, die in Stefans Annahme ihren Höchstwert  $1/2$  erreicht, in der abgeschlossenen Netzebene des NaCl hingegen überaus niedrig ist.

Stefan selbst hebt hervor, daß die Laplacesche Annahme, die er bei seiner Ableitung benutzt, „fernwirkende Kräfte“ voraussetze, „deren Wirkung sich über eine große Zahl von Molekülen erstreckt“. Er glaubt aber, es werde sich „dieselbe Beziehung zwischen den Theorien der Kapillarität und der Verdampfung“ ergeben und am Ergebnis nichts ändern, wenn man annehme, „daß solche anziehende Kräfte nur zwischen den unmittelbar aneinander liegenden oder sich berührenden Molekülen ausgeübt werden“. „Ein Molekül in der Oberfläche ist an weniger Nachbarn gebunden, im Mittel nur an halb so viele als ein Molekül im Inneren.“

Den im Original überaus klaren und bestimmten Überlegungen Stefans werden wir an dieser einen Stelle nicht folgen können. Die Lage, in der ein Baustein nur noch die Hälfte seiner Nachbarn hat, sieht anders aus: er muß nicht nur in der Oberfläche liegen, man muß auch die Netzebene und die Kette, der er angehört, jeweils zur Hälfte wegnehmen. Diese Lage nannten wir deshalb auch die am „halben Kristall“ (sie ist Voraussetzung für Anlagerung im wiederholbaren Schritt). Der Baustein *inmitten* der Oberfläche aber hat mehr als die Hälfte seiner Nachbarn.

Stefans Satz führt noch einmal zu den Unterscheidungen zurück, von denen wir eingangs sprachen.

Er ist ein typisches Ergebnis der Kontinuumsmethodik. Die Überlegungsweise, aus der er von Stefan abgeleitet wurde und nach der man ihn auch heute noch vorträgt, operiert mit einer kugeligen, stetig von anziehenden Raumelementen erfüllten Wirkungssphäre der Molekularkräfte, behandelt aber den Baustein selbst als mathematischen Aufpunkt, läßt seine eigene Ausdehnung unbeachtet. Sie ist damit bezeichnend für diese scheinbar allgemein vorgehenden Verfahren, die in der Tat spezielle Voraussetzungen enthalten.

9. Da Gibbs stets, auch bei uns, als Autor der Kontinuumsbehandlung zitiert wird, muß betont werden, daß er ihren vorläufigen Charakter durchaus gesehen hat. „Denn wir können nicht annehmen, daß ein Körper vom inneren Bau und der äußeren Gestalt eines Kristalls durch einen völlig stetigen Vorgang, oder einen, der in demselben Sinn wie Verflüssigung und Verdampfung zwischen Flüssigkeit und Gas oder der entsprechende Vorgang zwischen einem amorphen festen Körper und einer Flüssigkeit stetig ist, wächst oder sich löst.“<sup>1)</sup>

Einen interessanten Weg zur Behandlung der Gleichgewichtsfrage gehen neuerdings Stranski und Kaischew<sup>2)</sup> in einer Reihe von Arbeiten, die unseren Betrachtungen sowohl in der Einfachheit des betrachteten Modells wie darin nahe stehen, daß ihnen die Ungleichwertigkeit der elementaren Schritte selbstverständlich ist. Es wird davon Gebrauch gemacht, daß die freie Oberflächenenergie durch den Mittelwert über die Einzelschritte gegeben ist und die Gleichgewichts-

1) W. Gibbs, Über das Gleichgewicht heterogener Stoffe, 1876; Thermodynamische Studien S. 380.

2) I. N. Stranski u. R. Kaischew, Ztschr. f. phys. Chem. B, **26**, S. 100, 114, 312, 317. 1934; A, **170**, S. 295. 1934.

bedingung auf Grund dieser Mittelwerte formuliert. Auch dort wird aber, wie dem Verf. scheint, letzten Endes immer die Thomson-Gibbsche Gleichung des Gleichgewichts am Kontinuum (die Endgleichung von § 3) vorausgesetzt. Offenbar beleuchten diese Arbeiten die Grundlagen der Kontinuumstheorie in interessanter Weise. Um aber den Umfang, in dem sie als Näherung gelten mag, sicher beurteilen zu können, wird vermutlich eine von der Thomson-Gibbschen Gleichung unabhängige strenge Diskussion der Möglichkeit eines Gleichgewichts an einem Körper mit gesetzmäßig variabler Ablösearbeit notwendig sein.

Danzig-Langfuhr, Physikalisches Institut der Technischen Hochschule.

(Eingegangen 10. Oktober 1934)

Auch  
immer  
ts am  
fenbar  
uums-  
n dem  
önnen,  
chung  
gleich-  
blöse-

Tech-

**Raumladungsmessungen  
in Bienenwachs während der Erstarrung  
und im festen Zustand**

**Von Paul Jaeger**

(Mitteilung aus dem Elektrophysikalischen Laboratorium  
des Elektrotechnischen Instituts der Technischen Hochschule München)

(Mit 9 Figuren)

**Einleitung**

**Ziel der Arbeit.** Es wird die Raumladung in Bienenwachs untersucht, die Untersuchung erstreckt sich auf zwei Abschnitte: 1. flüssiges Bienenwachs, aber mit besonderer Berücksichtigung des Übergangs vom flüssigen zum festen Zustand; 2. festes Bienenwachs: a) unmittelbar nach der Erstarrung; b) bei Zimmertemperatur.

**Versuchsprinzip.** 1. Abschnitt: Flüssiges Bienenwachs befindet sich zwischen zwei ebenen Elektroden, an die eine elektrische Spannung gelegt wird. Während sich die Flüssigkeit allmählich abkühlt und schließlich in den festen Zustand übergeht, wird sich gleichzeitig unter der Einwirkung der angelegten Spannung im Bienenwachs eine bestimmte Raumladungsverteilung herausbilden, die durch den Erstarrungsvorgang festgehalten wird. Das verfestigte Wachs wird in eine Anzahl Schichten zerschnitten parallel zu den Elektroden. Die Raumladung der einzelnen Schichten wird gemessen, so daß es dann möglich ist, sich über die Raumladungsverteilung zwischen den Elektroden ein Bild zu machen.

2. Abschnitt: a) Es wird versucht, das Prinzip des 1. Abschnittes anzuwenden in der Weise, daß eine elektrische Spannung an zwei ebenen Elektroden gelegt wird, zwischen denen sich Bienenwachs befindet, welches unmittelbar vor dem Anlegen der Spannung fest geworden ist und nach dem vorhin erwähnten Schnittverfahren auf Raumladung untersucht wird.

b) Die Spannung wird bei gleicher Elektrodenanordnung wie bisher an festes Bienenwachs gelegt, das sich auf Zimmer-

temperatur befindet. Die Probe wird unzerschnitten auf Gesamtladung untersucht.

Den Gedanken, den elektrischen Zustand eines Körpers durch Erstarrung festzuhalten, hat bereits Motatarō Eguchi<sup>1)</sup> bei der Herstellung eines dauerelektrischen Körpers, „Elektret“ genannt, verwertet.

Soll der Raumladungszustand einer Flüssigkeit durch Erstarren festgehalten werden, so muß die Beweglichkeit der Ladungsträger absolut genommen und auch relativ zur Beweglichkeit im flüssigen Zustand klein sein, eine Bedingung die bei Bienenwachs erfüllt ist, wie ein auf S. 486 beschriebener Versuch zeigt. Der Idealfall für eine solche Untersuchung wäre dann gegeben, wenn gleichzeitig mit der Spannungsentfernung von der Probe die Probe schlagartig festgemacht werden könnte. Das war jedoch bei Bienenwachs nicht zu erreichen, es benötigte zur Erstarrung eine gewisse Zeit.

#### Versuchseinrichtungen

*Schaltungen und Meßverfahren.* Die Versuche konnten nur mit hoher Gleichspannung durchgeführt werden (10, 20, 30 kV). Als Spannungsquelle diente ein Glühventilgleichrichter (Fig. 1).

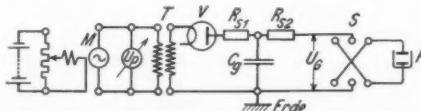


Fig. 1. *M* 1000-Hertzmaschine, *T* Transformator, *V* Glühventil, *R<sub>s1</sub>*, *R<sub>s2</sub>* Schutzwiderstände, *C<sub>g</sub>* Hochspannungskondensator, *S* Hochspannungsschalter, *P* Probe

Die Welligkeit  $\frac{V_{\max} - V_{\min}}{V_{\max}} = 1 - \sin(\omega t_1)$  errechnete sich zu rund 5%.  $t_1$  ist gegeben durch die Gleichung:

$$\sin(\omega t_1) + \frac{t_1}{R_{i_s} C_g} + \frac{3}{4f \cdot R_{i_s} C_g} - 1 = 0.$$

( $R_{i_s}$  Isolationswiderstand der Anordnung gegen Erde).  $R_{i_s}$  erscheint deshalb in der Gleichung, weil es klein ist im Vergleich zum Widerstand der Probe und daher praktisch allein maßgebend für den aus dem Gleichrichter entnommenen Strom. In einer Eichkurve wurde  $U_g$  (mit der Kugelfunkenstrecke bestimmt) in Abhängigkeit von  $U_p$  aufgetragen.

1) Motatarō Eguchi, Phil. Mag. **49**. S. 178. 1925.

Zur Messung der Raumladung einer Probe diente ein Verfahren, wie es in Fig. 2 dargestellt ist. *B* ist eine Messingbüchse mit abnehmbarem Deckel; die durch Schraffierung angedeuteten Füße und der Handgriff des Deckels waren aus Bernstein. Es hat sich jedoch gezeigt, daß der Deckel nicht unmittelbar am Bernstein erfaßt werden durfte, da sich sonst Störungen bemerkbar gemacht hätten. In den Bernstein war

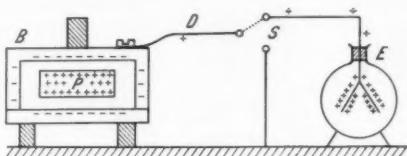


Fig. 2

deshalb noch ein Messinggriff eingeschraubt. Auch die Füße wurden nicht eigentlich als Füße verwendet bei der wirklichen Ausführung, sondern als solche dienten Messingschrauben, die von unten in die Bernsteinstücke eingelassen waren. Sämtliche an der Büchse vorhandenen Bernsteinstücke waren also nur isolierende Zwischenstücke. Das Elektrometer war ein Einfadeninstrument, dessen Schneiden je nach Bedarf eine Hilfsspannung von 60 oder 120 Volt zugeführt wurde. Die Eichung der Elektrometeranordnung geschah in der Weise, daß ein Probekondensator von bekannter Kapazität bei bekannter Spannung aufgeladen wurde. Den einen Beleg dieses Kondensators bildete ein besonders geformter Körper, der an einem Seidenfaden hing und dessen Ladung genau bekannt war. Dieser Körper wurde in die Büchse eingelegt und der zugehörige Elektrometerausschlag abgelesen. Wichtig bei einer derartigen Eichung ist es, daß sich die Erdkapazität der Elektrometeranordnung nicht ändern darf.

*Versuchsgefäß.* Darunter wollen wir den Teil der Gesamtapparatur verstehen, der zur elektrischen Beeinflussung der Probe dient. Einmal mußte es die Probe im flüssigen und festen Zustand aufnehmen und ferner mußte die Probe nach ihrer elektrischen Beeinflussung, im festen Zustand also, daraus zum Zwecke der weiteren Untersuchung entnommen werden. Das Versuchsgefäß mußte daher weitgehend zerlegbar gestaltet werden und der Aufrechterhaltung des flüssigen oder festen Zustandes wurde durch Zufuhr von Warm- oder Kaltluft Rechnung getragen. Fig. 3 zeigt das Versuchsgefäß. Man

erkennt auf dem Bild ein äußeres Mantelgefäß (a) als Hülle für die zu- und abströmende heiße und kalte Luft, bestehend aus einem oberen und einem unteren Teil. Am Mantelgefäß befinden sich die Rohrstützen (b), (c) für die Luftzufuhr und

-abfuhr. Ferner sieht man das innere Gefäß (d) zur Aufnahme der Probe und die beiden Elektroden (e). Der obere Elektrodenstiel ist mit einer Stellvorrichtung (f) zusammengebaut; zum Auflegen der Spannungszuführungen sind zwei Wülste (g) vorhanden. Damit die Probe nötigenfalls vor dem Versuch evakuiert werden konnte, war eine Glassglocke (h) zum Aufsetzen auf das innere Gefäß vorgesehen. Das Versuchsgefäß ist rund und weitgehend aus Glas hergestellt, die Elektroden sind aus Nickel, die Stiele aus Messing, die Griffe aus Hartgummi. Alle Teile, die irgendwie mit der Probe in Berührung kommen, müssen sorgfältig gereinigt und im Exsikkator getrocknet werden.

*Zerlegevorrichtung mit Nebeneinrichtungen.* Mit deren Hilfe ist es möglich, die aus dem Versuchsgefäß entnommene Probe von den Elektroden zu befreien und erforderlichenfalls in

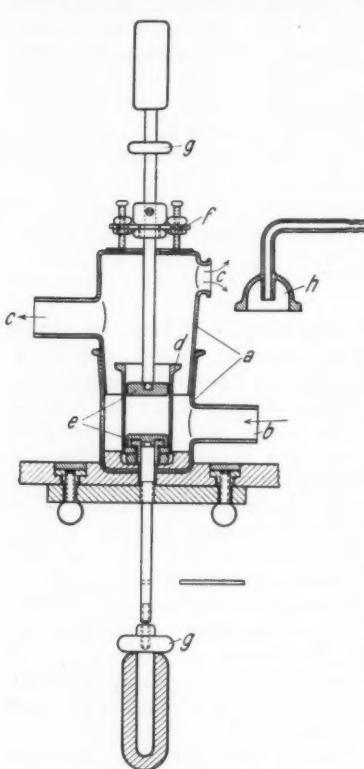


Fig. 3. Versuchsgefäß

Schichten zu zerlegen, so daß anschließend die Untersuchung im Elektrometer folgen kann. Die Vorrichtung besteht aus mehreren Teilen: Einspannvorrichtung, Schneidevorrichtung, 1 Zange mit Kupfereinsätzen, 2 Kupferzwischenstücke. Die Einspannvorrichtung diente zum Einspannen der unteren Elektrode mit der fest darauf sitzenden Probe. Um beim Zer-

schneiden in Schichten den gewünschten Vorschub einzustellen, befand sich auf dem unteren Elektrodenstiel eine Millimeterskala. Ober- und Unterteil der Einspannvorrichtung haben Einsätze, die aus Bernstein sein können. Die Schneidevorrichtung besteht aus einem auf Pertinaxklötzen festgeschraubten Chromnickelband (Länge 80 mm, Breite 10 mm, Dicke 0,2 mm). An den Pertinax-

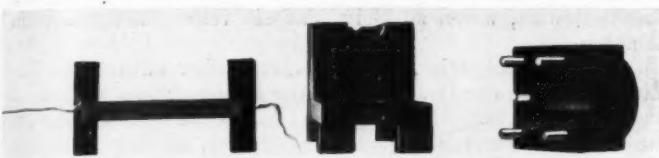


Fig. 3a. Einspann- und Schneidevorrichtung

klötzen wird das Band beim Schneidevorgang gehalten, außerdem sind hier die Bandenden mit den Zuleitungen zur elektrischen Heizung des Bandes verbunden. Zur Heizung diente Wechselstrom (Stromstärke 10 Amp.), um einseitigen Aufladungen an der Probe vorzubeugen. Dieses System hat sich am besten bewährt.

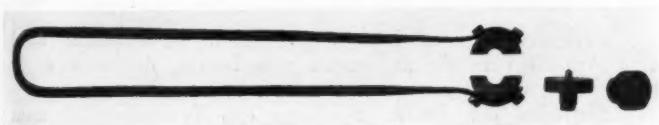


Fig. 3b

Mit Hilfe der Zange und unter Einschaltung der beiden Kupferzweischenstücke werden Elektroden und Probe voneinander getrennt. Die Gegenstände sind in Fig. 3b zu sehen, über die genauere Handhabung später!

#### Versuchsmaterial

*Eigenschaften des Bienenwachses.* Das als Versuchsmaterial dienende Bienenwachs mußte verschiedenen Versuchsanforderungen genügen:

a) Der flüssige oder feste Zustand mußte leicht aufrecht erhalten werden können, der Schmelzpunkt lag bei 60° C.

b) Beim Übergang vom flüssigen zum festen Zustand dürfen Schwunderscheinungen sich nicht bemerkbar machen, was auch der Fall war, wenn der Elektrodenabstand nicht mehr als 0,5 cm betrug. Die Rißbildung bei der Verfestigung wurde durch kleine Zusätze von Ceresin und Paraffin vermieden.

c) Die bei einem Versuchsgang auftretenden Störungen, deren Größe durch einen Versuch ohne Spannung (Leerversuch) ermittelt wird, waren so klein, daß sie vernachlässigt werden konnten.

Ein Versuch zeigt, daß die schon früher aufgestellte Bedingung wegen der Beweglichkeit der Ladungsträger erfüllt ist bei Bienenwachs. Der geladene Faden des Elektrometers wurde an flüssiges Bienenwachs geschaltet, in das außerdem ein geerdeter Metalldraht eintauchte; der Ausschlag ging augenblicklich auf Null zurück. Wurde der Versuch mit festem Wachs durchgeführt, so blieb der Ausschlag bestehen.

*Vorbehandlung des Bienenwachses.* Zur Beseitigung mechanischer Verunreinigungen ließ man es im erhitzten Zustand durch ein gutes Papierfilter laufen. Vor einem Versuch wurde das Wachs sorgfältig auf etwa 120° erhitzt, um Feuchtigkeit und auch Luft auszutreiben. Vom Destillieren wurde abgesehen, da die Gefahr einer Zersetzung gegeben schien.

#### Allgemeines über die Durchführung der Versuche

*Vorbemerkung.* Beiden untersuchten Abschnitten sind eine Anzahl Versuchshandlungen gemeinsam, die nun einer Darstellung unterzogen werden sollen.

*Einfüllen der Probe.* Nachdem das Versuchsgefäß zum Versuch vorbereitet ist, wird es kräftig vorgeheizt. Sodann wird das Wachs in das innere Versuchsgefäß gegossen; das Mantelgefäßoberteil ist mittlerweile abgehoben und wird dann behutsam aufgesetzt. Dabei ist streng darauf zu achten, daß sich unter keinen Umständen unter der oberen Elektrode, die beim Aufsetzen des Oberteils in die Flüssigkeit eingeführt wird, Luftblasen ansetzen. Wurde die Probe vor dem Versuch evakuiert, so blieb das ohne Einfluß auf das Versuchsergebnis.

*Herausnehmen der Probe aus dem Versuchsgefäß.* Da sich die Probe vor dem Herausnehmen stets im festen Zustand befindet, kann der Stiel aus der oberen Elektrode herausgeschraubt und dann zusammen mit dem Mantelgefäßoberteil abgehoben werden. Durch das nunmehrige Einschalten von Warmluft wird erreicht, daß sich die Probe von der inneren Gefäßwand löst, so daß sie durch die untere Elektrode hoch-

geschoben werden kann. Zur endgültigen Herausnahme muß der untere Griff abgeschraubt werden. Soweit das Wachs die untere Elektrode von unten her umfaßt, wird es am besten mit einem Messer entfernt, da es den weiteren Versuchsgang nur stört.

*Behandlung der Probe in der Zerlegeeinrichtung.* Die Probe wird in die Einspannvorrichtung gelegt und, falls sie in Schichten zerschnitten werden soll, gleich so, daß die erste Schicht 1 mm stark wird.

*Zerschneiden in Schichten:* Mit dem Chromnickelband wird zuerst das Wachs abgeschnitten, welches sich über der oberen Elektrode befindet, so daß diese sichtbar wird. An diese wird nun das eine Kupferzwischenstück geschraubt, die Kupfereinsätze der Zange werden entsprechend erhitzt und es wird mit der Zange das Zwischenstück erfaßt. Die Wärme überträgt sich auf die Elektrode, so daß diese sich von der Probe löst und abgezogen werden kann. Das Wachs, welches die Elektrode seitlich umgeben hatte, wird ebenfalls mit der Schneidevorrichtung entfernt. Nun werden die einzelnen Schichten abgeschnitten, wobei das Messer schräg zu halten und an der Ebene des Bernsteineinsatzes entlang zu führen ist. Die Schichten läßt man auf geeignete Objektträger fallen.

Die letzte Schicht wird in der Weise von der Elektrode abgelöst, daß der Elektrodenstiel durch die Bohrung des zweiten Kupferzwischenstücks, das vorher erwärmt wurde, eingeführt wird, bis die Elektrode auf dem Kupfer aufsitzt; nach kurzer Zeit kann die Schicht abgehoben werden. Die störenden Ränder werden mit einer erwärmten Rasierklinge oder einem erwärmten Draht entfernt.

Soll die Probe hingegen unzerschnitten bleiben, so sind alle Handlungen bis auf das Zerschneiden selbst die gleichen.

*Einbringen der Probe in die Elektrometeranordnung.* Eine Probe auf dem Objektträger wird mit der Pinzette erfaßt und in die Meßbüchse eingelegt ohne daß dabei die Pinzette irgend einen Teil der Anordnung berührt.

*Vorsichtsmaßregeln.* Temperaturen: Die Temperaturen bei sämtlichen Ablöse- und Schneidevorgängen sind dann richtig gewählt, wenn diese Vorgänge ohne Anwendung von Gewalt und ohne merkliche Spuren geschmolzenen Bienenwachses vonstatten gehen.

*Entfernung von Wachsspuren:* Alle Teile sind vor jeder neuen Benutzung, soweit sie mit der Probe irgendwie in Berührung waren, sorgfältig von Wachsspuren zu befreien.

Beseitigung von Störladungen: Diese ist bei allen Teilen, die mit der Probe in Berührung waren, durchzuführen, gegebenenfalls durch Berührung mit der nicht zu heißen Bunsenflamme.

Berührung einer Probe mit Metallteilen: Durch den Versuch wurde festgestellt, daß dabei Influenzladungen praktisch nicht auf die Probe wanderten. Daraus leitete sich die Begründung ab, die Probe z. B. mit der Pinzette zu erfassen.

Freie Ionen: Die Anlagerung freier Ionen aus der Luft an die Probe ging so langsam vor sich, daß auch nach einigen Stunden keine merkliche Ladungsabnahme zu beobachten war.

*Bezeichnung der Schichten und Ausschläge.* Die durch Zerschneiden gewonnenen Schichten sind durchlaufend von I bis V nummeriert (der Elektrodenabstand war nämlich stets 0,5 cm). Mit I soll immer die Schicht bezeichnet werden, welche der Kathode benachbart war. Elektrometerausschläge wurden allgemein mit  $\alpha$  bezeichnet, ein von Schicht I herührender Ausschlag hat dann noch den Index I, der Ausschlag lautete also  $\alpha_I$ .

**1. Abschnitt: Untersuchung flüssigen Bienenwachses mit besonderer Berücksichtigung des Übergangs vom flüssigen zum festen Zustand**

*Über den Versuchsgang.* Hier sollen nur Besonderheiten erwähnt werden. Nachdem das Wachs eingefüllt und noch flüssig ist, wird zu einem Zeitpunkt 0  $U_G$  an die Probe gelegt und gleichzeitig die Stoppuhr losgedrückt. Es läßt sich so gleich zwischen den Elektroden ein Strömen beobachten<sup>1)</sup>. Nach einer Zeit  $t_e$  fängt die Probe zu erstarren an. Zwischen 0 und  $t_e$ , zuweilen auch schon vorher, war die Heizung abgestellt worden, so daß sich die Probe abkühlen konnte. Der Zeitpunkt  $t_e$  wurde in der Weise festgelegt, daß sich an den Seiten der unteren Elektrode eine leichte Trübung durch verfestigtes Wachs bemerkbar machte. Nach kurzer Zeit griff die Verfestigung auch auf den Raum zwischen den Elektroden über. Nach einer gewissen „Versuchszeit“  $t$  vom Zeitpunkt 0 an gerechnet wird  $U_G$  von der Probe weggenommen. Zwischen  $t$  und  $t_e$  besteht die Beziehung:  $t \geq t_e$ . Ist die Probe fest ge-

1) R. Hofmann, Diss. 1934 T. H. München.

Weitere Literatur: Brenzinger, Arch. f. Elektrotechn. 1927, XVIII; P. Böning, Mitt. a. d. tech. Inst. d. Staatl. Tung-chi Univ. 1931 (3); 1932 (5); 1933 (9); A. Gemant, ETZ. 18. Mai 1933; F. Kirchner, Handb. XXIV 1. Teil; H. Schäfer, Ztschr. f. Phys. 62. S. 585—591. 1930; W. O. Schumann, Ztschr. f. techn. Phys. 1933 Nr. 1; Arch. f. Elektrotechn. 1933, XXVII 3. u. 4. Heft; Ztschr. f. Phys. 79. S. 532. 1932; A. Schwaiger, Elektr. Festigkeitslehre.

teilen, die gebenenen  
inflame.  
den Ver-  
praktisch  
die Be-  
erfassen.  
der Luft  
einigen  
ten war  
e durel  
d von I  
ch stet  
werden,  
sschläge  
I her-  
usschlag

erheiten  
d noch  
e gelegt  
sich so-  
chten<sup>1)</sup>.  
schen 0  
gestellt  
punkt  $t$   
ten der  
festiges  
die Ver-  
n über.  
an ge-  
schen  $t$   
est ge-

1927,  
1931 (3);  
ehner,  
1. 1930;  
Elektro-  
1. 1932;

worden, dann wird sie aus dem Versuchsgefäß entnommen, sie wird zerschnitten oder nicht und dann die weitere Untersuchung vorgenommen.

*Versuchsbedingungen.*  $U_0 = 10$  und  $20$  kV,  $t$  war fast immer  $15$  Min.,  $t_e$  war veränderlich,  $d$ , der Elektrodenabstand, war stets  $0,5$  cm.

Die Begründung für das fast stets gleichbleibende  $t$  soll erst an Hand der Versuchsergebnisse gebracht werden. —  $d$  durfte nach oben nicht verändert werden wegen der sonst vorhandenen Schrumpfgefahr, und eine Veränderung nach unten wäre auf Kosten der Meßgenauigkeit gegangen, da zur guten Ermittlung der Raumladungsverteilung eine Anzahl Schichten erforderlich war, die Schichten aber aus versuchstechnischen Gründen nicht dünner als  $1$  mm geschnitten werden konnten.

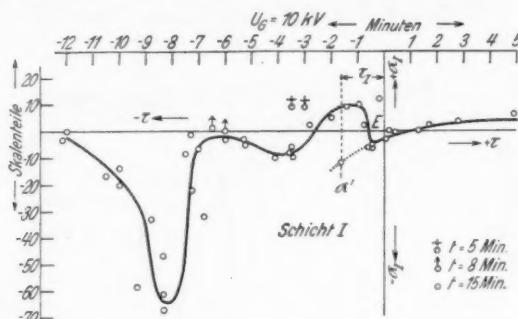


Fig. 4a

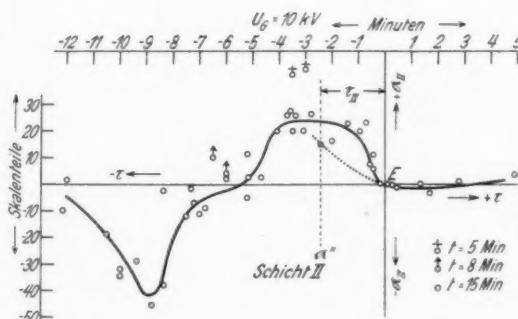


Fig. 4b

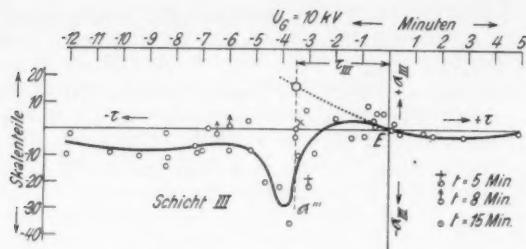


Fig. 4c

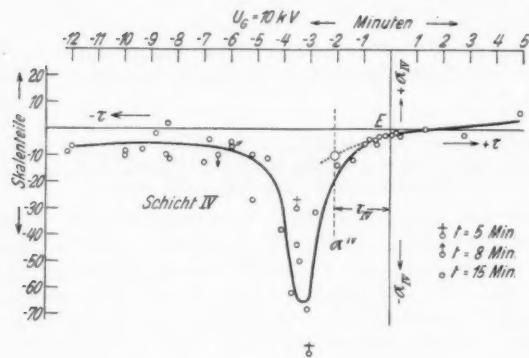


Fig. 4d

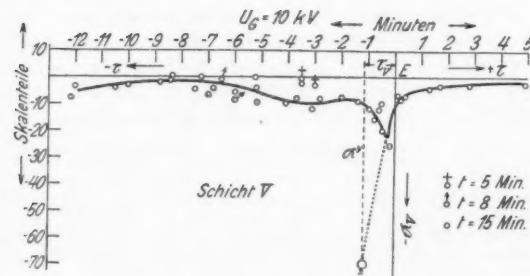


Fig. 4e

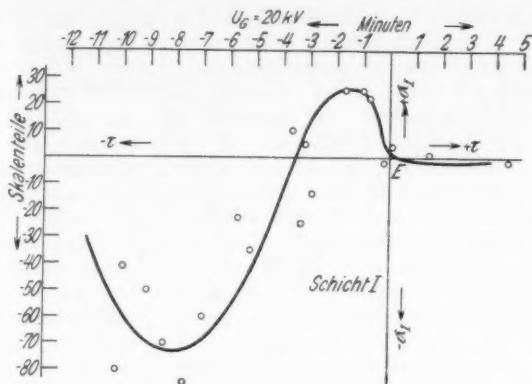


Fig. 5a

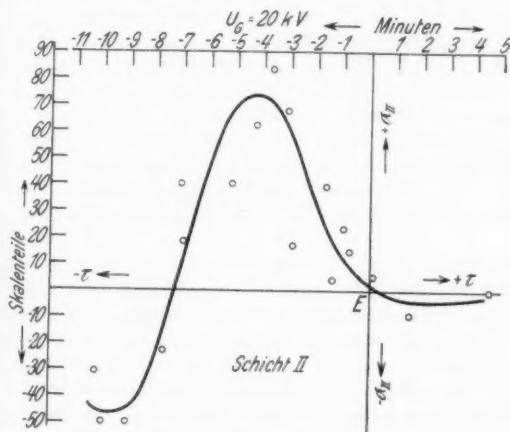


Fig. 5b

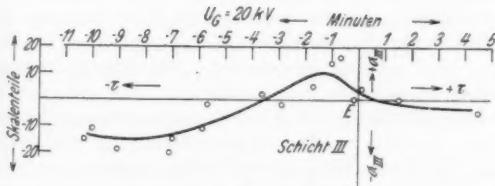


Fig. 5c

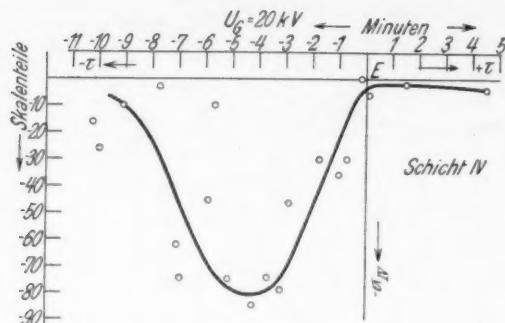


Fig. 5d

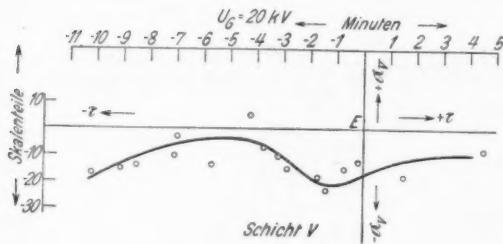


Fig. 5e

*Darstellung der Meßergebnisse in Kurvenform.* Für jede Schicht diente ein eigenes Koordinatensystem, ebenso für jede Spannung (Figg. 4a—4e und 5a—5e). In Richtung der senkrechten Achse wurden die Elektrometerausschläge  $\alpha$  in Skalenteilen aufgetragen, diese bezogen auf eine Hilfsspannung von 120 Volt (Elektrometerkonstante  $c = 2,3 \cdot 10^{-11}$  Coulomb/Skt.). In Richtung der waagrechten Achse, auch  $\tau$ -Achse genannt, wurde den zeitlichen Bedingungen Rechnung getragen. Jedes  $\tau$  ist durch die Beziehung gegeben:  $\tau = (t_e - t)$  Minuten.  $\tau = 0$  bedeutet nach dieser Festlegung:  $U_G$  wird in dem Augenblick entfernt, wo sich in der Probe die ersten Erstarrungsspuren zeigen.

*Vergleich der erhaltenen Kurven.* Die absoluten Beträge der  $\alpha$ -Werte sind für  $\tau > 0$  ziemlich klein, für  $\tau < 0$  jedoch stellenweise sehr groß. Bei beiden Spannungen und gleichen Schichtnummern zeigt sich im Sinne wachsender negativer

$\tau$ -Werte mit Bezug auf die Reihenfolge der Extreme und 0-Durchgänge von  $\alpha$  eine gute Übereinstimmung. Gewisse Eigenschaften zweier Schichtnummern zusammen zeigen sich ebenfalls bei beiden Spannungen. Ist z. B.  $\alpha_{11}$  ein Maximum, dann ist bei  $\alpha_{14}$  ein Minimum zu beobachten. Daneben zeigen die Kurven für 10 und 20 kV auch gewisse Verschiedenheiten: die Minima bei 10 kV sind schärfer und die Beträge von  $\alpha$  bei dieser Spannung meist kleiner als bei 20 kV.

*Besondere Vorgänge beim Versuch und ihr Einfluß auf die Ergebnisse.* Wirbeln fester Wachsteilchen: Erstarrt die Probe, dann macht sich bei 20 kV stets und bei 10 kV im Bereich  $\tau = 0$  bis -5 Minuten ein Wirbeln fester Wachsteilchen bemerkbar. Diese werden unter den Einfluß elektrischer Feldkräfte aus den Bereichen der Probe, die sich zu verfestigen beginnen, herausgerissen und bewegen sich dort, wo die Probe noch flüssig ist, bis die fortschreitende Verfestigung jeglicher Bewegung fester Wachsteilchen ein Ende setzt.

Durchschläge: Diese treten bei 20 kV auf, besonders beim Einschalten und während des Erstarrungsvorganges, aber auch bei höherer Temperatur des flüssigen Wachses. Schuld daran sind wohl in erster Linie die scharfen Abrundungen der Elektroden, die jedoch absichtlich so ausgeführt waren, um bei der gegebenen Versuchsanordnung mit Glasumhüllung das Feld im Dielektrikum möglichst homogen zu gestalten (vgl. Fig. 3). Die zahlreich auftretenden Durchschläge sind auch der Grund, weshalb die Punktdichte bei 20 kV wesentlich geringer ist als bei 10 kV.

*Beschädigung von Schichten:* Beim Zerschneiden in Schichten war zuweilen eine beschädigt worden oder beim Einlegen in die Elektrometeranordnung nebenhin gefallen. In einem solchen Fall wurde auf die Eintragung eines Meßpunktes verzichtet.

*Kontrollversuche.* Umgekehrte Spannungsrichtung: Dadurch wurde erreicht, daß beim Schnittvorgang das Abtrennen der Schichten in umgekehrter Reihenfolge geschah wie sonst. Die Ergebnisse entsprechender Schichten bei gewöhnlicher und umgekehrter Spannungsrichtung mußten dabei weitgehendst übereinstimmen, gleiche Versuchsbedingungen natürlich vorausgesetzt. Die stärkste Abweichung betrug in einem Fall bei einer Schicht 5 Skt., sonst waren die Abweichungen kleiner. Sie sind sämtlich unbedeutend im Vergleich zu den beobachteten Ausschlägen von rund dem 10fachen.

*Unzerschnittene Probe:* Hier zeigte sich gute Übereinstimmung mit den durch Summation gewonnenen Werten

V  
2  
1  
1  
9  
3  
4

unter gleichen Versuchsbedingungen. Die Abweichung errechnet sich zu rund 11% mit Bezug auf die Summe der Teilladungen.

Leerversuche: Diese ergaben, daß die auftretenden Störungen innerhalb einer Grenze von  $\pm 2,5$  Skt. liegen.

Die festzustellenden Abweichungen können ohne weiteres in Kauf genommen werden, wenn man bedenkt, daß die durch umgekehrte Spannungsrichtung und die mit den unzerschnittenen Probe ermittelten Werte Einzelwerte sind, sie aber auf Werte bezogen werden, welche Mittelwerte darstellen. Die Leerversuche zeigen, daß kleine  $\alpha$ -Werte innerhalb der soeben erwähnten Störungsgrenze von  $\pm 2,5$  Skt. liegen.

*Verteilung der Raumladungsdichte und der Feldstärke zwischen den Elektroden.* Die mittlere Raumladungsdichte  $\varrho$  einer abgeschnittenen Schicht ist gegeben durch die Beziehung

$$\varrho_n = \frac{4c}{\pi D^2 \delta} \cdot \alpha_n = k \cdot \alpha_n$$

( $c$ , Elektrometerkonstante, ist  $2,3 \cdot 10^{-11}$  Coulomb/Skt.;  $D$ , Elektrodendurchmesser, gleich 1,92 cm;  $\delta$ , Schichtdicke, gleich 0,1 cm).

Die Konstante  $k$  ist dann  $8 \cdot 10^{-11}$  Coulomb/cm<sup>3</sup> Skt., bezogen auf eine Hilfsspannung von 120 Volt. Man stellt den Elektrodenabstand in entsprechendem Maßstab dar und teilt ihn in 5 Teile entsprechend den 5 Schichten, die Elektrodenebenen werden durch Senkrechte zu diesem Abstand angedeutet, Anode und Kathode festgelegt. Über den 5 Abschnitten trägt man die zugehörigen mittleren Raumladungsdichten bzw. die damit proportionalen Elektrometerausschläge auf, positives  $\alpha$  nach oben, negatives nach unten. Damit erhält man die Kurve der Raumladungsdichteverteilung in Treppenform, in die sich dann noch ein Linienzug einzeichnen läßt.

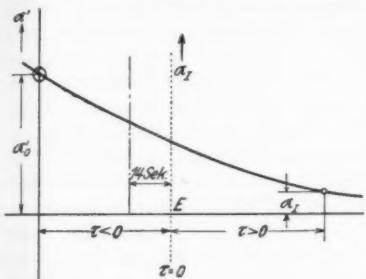
Die Raumladungsdichte ist gegeben durch die Beziehung:  $\varrho = \operatorname{div} \mathfrak{D} = \operatorname{div}(\mathcal{A} \mathfrak{E})$ . ( $\mathcal{A}$  allgemeine Dielektrizitätskonstante,  $\mathfrak{D}$  elektrische Verschiebung,  $\mathfrak{E}$  elektrische Feldstärke). Setzt man konstantes  $\mathcal{A}$  voraus und näherungsweise homogenes Feld, dann können  $\frac{\partial \mathfrak{E}_y}{\partial y}$  und  $\frac{\partial \mathfrak{E}_z}{\partial z}$  nicht auftreten und es läßt sich obige Gleichung umformen in:

$$\frac{\varrho}{\mathcal{A}} = \frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x}.$$

Durch graphische Integration läßt sich somit aus der  $\varrho$ -Kurve die  $\mathfrak{E}$ -Kurve gewinnen. Werden für eine Anzahl ausgezeichneter  $\tau$ -Werte die  $\varrho$ - und daraus die  $\mathfrak{E}$ -Kurven ermittelt, so ergeben sich teilweise beträchtliche Feldverzerrungen.

rechnet  
lungen.  
en Stö-  
weiteres  
durch  
ittenen  
Werte  
Leer-  
soeben  
dstärke  
e, e-  
iehung  
kt.;  
ezogen  
Elek-  
ilt ihn  
ebenen  
Anode  
t man  
damit  
nach  
Kurve  
sie sich  
ehung:  
stante,  
Setzt  
s Feld,  
bt sich  
us der  
Anzahl  
en er-  
ungen.

Extrapolationsverfahren zur Ermittlung der Raumladungsverteilung in der flüssigen Probe. Für sämtliche Werte von  $\tau > 0$  sind die  $\alpha$  klein. Der wahrscheinlichste Grund hierfür ist der, daß infolge der großen Ionenbeweglichkeit des flüssigen Bienenwachses der größte Teil der Raumladung abgeführt wird, sobald der äußere Zwang der aufgedrückten Spannung fehlt und noch ehe die Erstarrung diesen Vorgang verhindern kann. Man könnte versuchen, durch Extrapolation vom flüssigen in das feste Gebiet den jeder Schicht zugehörigen Wert zu finden, der dann vorhanden wäre, wenn es gelingen würde, im Augenblick der Spannungsentfernung die Probe



Erstarrungs-  
zeitpunkt Fig. 6.  
Schema der Extrapolation für Schicht I

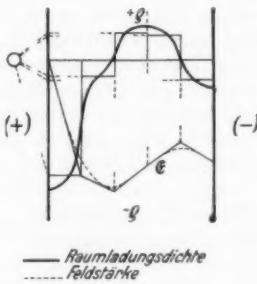


Fig. 7

schlagartig festzumachen. Diese Werte bezeichnen wir mit  $\alpha_0^I, \alpha_0^{II}, \alpha_0^{III}, \alpha_0^{IV}, \alpha_0^V$ . (Vgl. auch Fig. 6.) Diese Extrapolation ist in den Kurvenblättern für 10 kV durchgeführt worden, die Grenzzeiten, auf die extrapoliert wird, sind mit  $\tau_I, \tau_{II}, \tau_{III}, \tau_{IV}, \tau_V$  bezeichnet. Man sieht aus den Zeichnungen, daß zumindest bei den Schichten II und V die Extrapolation nicht einwandfrei durchgeführt werden kann, obwohl die Führung dieser beiden Linienzüge eine gewisse Berechtigung hat, da für den Übergang vom rein flüssigen zum Erstarrungsgebiet die Kurve einen stetigen Verlauf nimmt und außerdem — dieser Gedanke wurde den 5 Extrapolationen zugrunde gelegt — in dem Bereich  $\tau = 0$  bis  $-14$  Sek. die Probe noch als rein flüssig zu bezeichnen ist, da die mittlerweile einsetzende Verfestigung noch nicht auf das Gebiet zwischen den Elektroden übergegriffen hat.

Die Werte, welche nach diesem Verfahren gefunden werden, sind:  $\alpha_0^I = -12, \alpha_0^{II} = 15, \alpha_0^{III} = 16, \alpha_0^{IV} = -10,$

$\alpha_0^V = -70$  Skt. Es ist nun möglich, hierfür die mutmaßliche  $\rho$ - und  $E$ -Kurve zu zeichnen (Fig. 7).

*Folgerungen aus den Versuchsergebnissen.* Die zeitliche Reihenfolge der Versuche war so, daß für  $\tau = 0$  sehr kleine  $\alpha$  festgestellt wurden und deshalb der Gedanke einer Extrapolation sehr nahe lag. Da aber über den zu erwartenden Erfolg nichts bekannt war, wurde ein nicht zu großes  $t$  (= 15 Min.) gewählt. Letzten Endes war das Ergebnis der Extrapolation mehr qualitativ als quantitativ, so daß es sich nicht lohnte, diese auch noch bei anderem  $t$  und auch bei 20 kV anzuwenden. Da sich aber während des Erstarrungsvorganges interessante Erscheinungen eingestellt hatten, wurden diese weiter untersucht und aus Vergleichsgründen  $t = 15$  Min. beibehalten für 10 und 20 kV. Allerdings wurden auch noch Stichproben mit anderem  $t$  unternommen und eingezeichnet. Die Kurvenbilder für 10 und 20 kV lassen eine gewisse Streuung erkennen, diese ist einmal durch eine gewisse Ungenauigkeit beim Schnittverfahren bedingt, andererseits aber auch durch den Erstarrungsvorgang selbst. Eine einfache Deutung und vor allem rechnerische Erfassung der beobachteten Vorgänge wird wohl kaum möglich sein, da sich der reinen Ionenbewegung noch die Bewegung geladener makroskopischer Teilchen überlagert.

## 2. Abschnitt: Untersuchung festen Bienenwachs

### Überblick

Es zeigte sich, daß das Schnittverfahren nicht ohne weiteres auf den 2. Abschnitt übertragen werden darf, wenn man zu eindeutigen Ergebnissen kommen will. Hingegen waren Untersuchungen an der unzerschnittenen Probe, sofern sie in bestimmter Richtung durchgeführt wurden, durchaus möglich.

#### a) Untersuchung unmittelbar nach der Erstarrung (nach dem Schnittverfahren)

*Über den Versuchsgang.* Auch hier sollen nur noch Besonderheiten gebracht werden. Ist die Probe eingefüllt, dann wird die Heizung abgestellt, die Probe kühlt sich ab und wird fest. Ist dieser Zustand erreicht, dann wird  $U_G$  angelegt und die Stoppuhr losgedrückt. Diesen Zeitpunkt bezeichnen wir mit 0.  $U_G$  bleibt während der „Versuchszeit“  $t$  an der Probe. Sodann wird die Probe aus dem Versuchsgefäß genommen, zerschnitten und die Schichten werden auf ihre Raumladung

untersucht. Um aber schneiden zu können, durfte die Probe nicht zu hart geworden sein. Das war der Grund, weshalb bei Anwendung des Schnittverfahrens hier unmittelbar nach der Erstarrung die Spannung angelegt wurde.

*Versuchsbedingungen.*  $U_G$  betrug meistens 10 kV, zuweilen auch 20;  $t$  war unveränderlich;  $d$ , der Elektrodenabstand, war stets 0,5 cm. Einer Vergrößerung von  $d$  stand diesmal zwar nicht die Schrumpfung entgegen, jedoch der Umstand, daß bei größerem  $d$  der Schneidevorgang mehr Zeit in Anspruch genommen hätte und bei den letzten Schichten die Probe sich bereits dermaßen stark abgekühlt hätte, daß das Schneiden fast nicht mehr möglich gewesen wäre. Es durfte aus diesem Grunde auch  $t$  nicht allzu sehr ausgedehnt werden.

*Darstellung der Ergebnisse in Kurvenform.* Für jede Schicht diente ein eigenes Koordinatensystem. In Richtung der senkrechten Achse wurden die Elektrometerausschläge  $\alpha$  in Skalenteilen, bezogen auf eine Hilfsspannung von 120 Volt (Elektrometerkonstante  $c = 2,3 \cdot 10^{-11}$  Coulomb/Skt.), aufgetragen und in Richtung der waagerechten Achse die Versuchszeit  $t$  (Fig. 8).

*Vergleich der Meßergebnisse mit denen des 1. Abschnittes.* Im 1. Abschnitt gab es eine Anzahl Versuche, bei denen sich  $U_G$  noch an der Probe befand, nachdem sie bereits vollkommen durcherstarrt war. Diese Zeit im 1. Abschnitt, welche  $U_G$  noch an der Probe war nach ihrer vollkommenen Erstarrung, heiße  $\tau_f$  und es sollen die Ergebnisse eines solchen Falles verglichen werden mit den Ergebnissen des Abschnittes 2a unter der Bedingung, daß die Versuchszeit  $t$  dieses Abschnittes zahlenmäßig mit dem  $\tau_f$  übereinstimmt. Es ist aber

$$\tau_f = |\tau| - |\tau_e|,$$

wobei  $\tau_e$  ungefähr gleich  $\tau_{III}$  ist (vgl. Fig. 4c)<sup>1)</sup>.

Ein unter diesen Gesichtspunkten durchgeführter Vergleich ergibt weder bei 10 noch bei 20 kV eine Übereinstimmung. Rein zufällig stimmen für  $U_G = 10$  kV und  $\tau_f$ , bzw.  $t = 5$  Min. 20 Sek. die  $\alpha$ -Werte in den einzelnen Schichten überein, für größeres und kleineres  $t$  und  $\tau_f$  sind starke Abweichungen vorhanden.

*Versuche mit umgekehrter Spannungsrichtung.* Versuche dieser Art zeigten ein sehr interessantes Ergebnis. Die Werte für  $t = 3$  Min. ( $U_G = 10$  kV) wurden in die bereits vorhan-

1) Für  $U_G = 20$  kV gilt fast der gleiche Wert.

denen Kurvensysteme eingetragen; dabei zeigte sich außer einer gewissen Neigung zum Streuen vor allem keine besonders gute Übereinstimmung mit den bereits vorhandenen Werten. Ganz beträchtlich war aber dann der Unterschied bei  $t = 9$  Min. Sobald man jedoch die Abkühlungsverhältnisse berücksichtigt

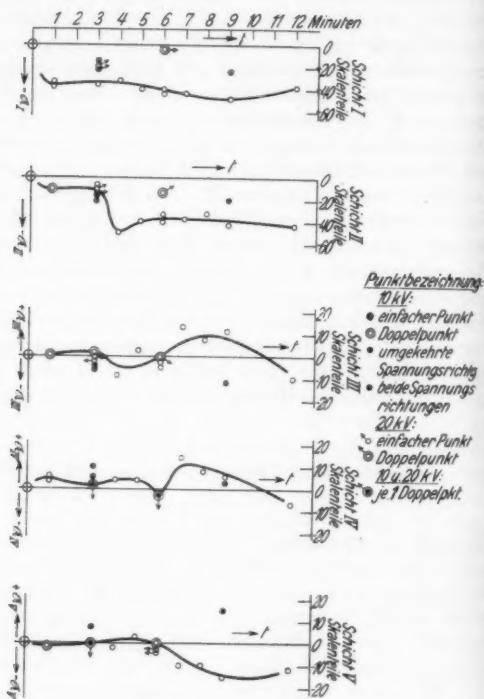


Fig. 8

und etwa mit denen des 1. Abschnittes, wo doch Spannungsumkehr eine gute Übereinstimmung geliefert hatte, vergleicht, wird folgender Unterschied offenbar: Bei den Versuchen während der Erstarrung erfolgte die Erstarrung symmetrisch von beiden Elektroden gegen die Mitte der Probe zu, da unter der Wirkung der angelegten Spannung die ständig vorhandene Strömung eine symmetrische Durchkühlung der noch flüssigen

außer  
sonders  
Verten.  
9 Min.  
sichtigt

Probe bewirkte. Ganz anders jedoch bei den Versuchen, bei denen die Spannung erst unmittelbar nach der Erstarrung angelegt wird, denn in diesem Fall ist ja während des flüssigen Zustandes keine Strömung vorhanden, weil kein elektrisches Feld vorhanden ist. Nach dem Einfüllen der Probe setzte von der unteren Elektrode her allmählich eine Verfestigung des Wachses ein. Ganz zum Schluß wurde die Umgebung der oberen Elektrode fest. Nun wurde die Spannung angelegt, während die Abkühlung des festen Wachses weitere Fortschritte machte. In der Umgebung der unteren Elektrode ging das am schnellsten (an der Wachsfärbung zu erkennen).

Wurden nun die Versuche mit beiden Spannungsrichtungen durchgeführt, dann waren das eine Mal die kälteren Bereiche an der Anode, das andere Mal an der Kathode; daß das zu verschiedenen Ergebnissen führen muß, ist klar, wenn man bedenkt, daß die Ionenbeweglichkeiten je nach der Temperatur des Mediums verschieden sind. Ein Versuch mit der unzerschnittenen Probe mußte für beide Spannungsrichtungen und gleiches  $t$  die gleichen Unterschiede im Ergebnis wie die Summen der Teilladungen bei verschiedenen Spannungsrichtungen aufweisen. Das war auch der Fall:  $U_G = 10 \text{ kV}$ ,  $t = 3 \text{ Min.}$  Bei kälterer Anode war  $\alpha = -40 \text{ Skt.}$ , bei kälterer Kathode  $\alpha = -12 \text{ Skt.}$  Durch Summation über die Schichtenladungen erhielt man im ersten Fall  $\alpha = -41 \text{ Skt.}$ , im zweiten Fall  $\alpha = -14 \text{ Skt.}$

*Folgerungen aus den Versuchsergebnissen.* Infolge der Inhomogenität der Probe waren also die Ergebnisse je nach der Spannungsrichtung verschieden. Würde man vor dem Anlegen der Spannung die Probe so lange stehen lassen, daß sie an jeder Stelle Zimmertemperatur angenommen hat, dann wäre infolge großer Erhöhung ein Zerschneiden in Schichten nicht mehr möglich. Eine Möglichkeit wäre ja noch dadurch gegeben, daß man das Versuchsgefäß in einen Ofen bringt, der auf zweckentsprechender Temperatur konstant gehalten werden kann. Es hatte also keinen Sinn, mit der vorhandenen Apparatur noch Untersuchungen bei anderen Spannungen als 10 kV durchzuführen, von den wenigen Stichproben bei 20 kV abgesehen. Die einzigen Untersuchungen mit festem Bienenwachs, die sich mit der vorhandenen Apparatur durchführen ließen und dabei zu eindeutigen Ergebnissen führen mußten auf Grund der bisher angestellten Überlegungen, waren die mit der unzerschnittenen Probe bei Zimmertemperatur.

b) Untersuchung bei Zimmertemperatur  
(mit der unzerschnittenen Probe).

*Über den Versuchsgang.* Nach dem Einfüllen läßt man die Probe mindestens 2–3 Std. stehen, damit sie sich auf Zimmertemperatur abkühlen kann. Mit einer derartigen Probe wurden verschiedene Versuchsarten durchgeführt:

Einfacher Versuch:  $U_G$  bleibt eine bestimmte Zeit  $t$  an der Probe, deren Gesamtladung gemessen wird.

Kommittierungsversuch:  $U_G$  bleibt eine Zeit  $t$  an der Probe, dann wird die Richtung von  $U_G$  plötzlich umgedreht und verbleibt in dieser neuen Richtung noch eine Zeit  $t_k$  daran.

Kurzschlußversuch:  $U_G$  bleibt eine Zeit  $t$  an der Probe, dann wird es entfernt und die Probe für eine Zeit  $t_0$  kurzgeschlossen.

*Versuchsbedingungen.* Einfacher Versuch:  $U_G$  war 10, 20, 30 kV;  $t$  wurde bis zu 60 Min. ausgedehnt;  $d$ , der Elektrodenabstand, war 0,5 cm.

Kommittierungsversuch:  $U_G$  war stets 30 kV;  $t$  war stets 30 Min.;  $t_k$  betrug 10, 20, 30, 40, 60 Min.;  $d$  war 0,5 cm.

Kurzschlußversuch:  $U_G$  war stets 30 kV;  $t$  war stets 30 Min.;  $t_0$  war 10, 30 und 60 Min.;  $d$  war 0,5 cm.

Daß der Wert  $d$  stets 0,5 cm war, hat den Grund, daß ursprünglich an einen Vergleich mit dem 1. Abschnitt gedacht war.

*Darstellung der Ergebnisse in Kurvenform.* Alle Ergebnisse wurden in ein Koordinatensystem eingetragen, in Richtung der senkrechten Achse die Ausschläge  $\alpha$ , bezogen auf eine

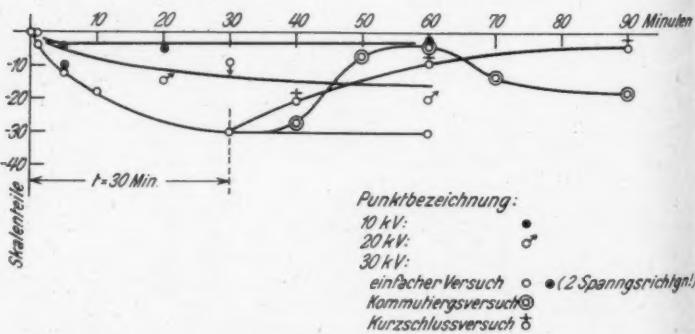


Fig. 9

Hilfsspannung von 120 Volt (Elektrometerkonstante  $c = 2,3 \cdot 10^{-11}$  Coulomb/Skt.); in Richtung der waagerechten Achse wurde den zeitlichen Bedingungen Rechnung getragen nach folgendem Plan (vgl. Fig. 9):

Einfacher Versuch:  $t$  wurde vom Ursprung aus aufgetragen.

Kommutierungsversuch: Die Abszisse eines jeden Meßpunktes war  $(30 + t_k)$  Min.

Kurzschlußversuch: Die Abszisse jedes Meßpunkts war  $(30 + t_0)$  Min.

**Kontrollversuche.** Versuche mit umgekehrter Spannungsrichtung: Diese wurden nur in Form einfacher Versuche durchgeführt und sind wohl zu unterscheiden von den Kommutierungsversuchen; sie zeigten gute Übereinstimmung, ein solcher Meßpunkt ist für 30 kV eingetragen worden.

Leerversuche: Die auftretenden Störungen bewegten sich innerhalb einer Grenze von  $\pm 3$  Skt.

**Besprechung der Versuchsergebnisse.** Einfacher Versuch: Bei 10 kV liegen die Werte innerhalb der Störungsgrenze von  $\pm 3$  Skt., bei 20 kV neigen sie zum Streuen, es zeigt sich ein Anwachsen der Raumladung mit der Zeit. Auch bei 30 kV wächst die Raumladung, jedoch viel rascher und zu größeren Beträgen als bei 20 kV. Bei rund 30 Min. ist bei 30 kV der Beharrungszustand eingetreten.

Kommutierungsversuch:  $U_G$  wurde hier deshalb nur 30 kV gewählt, weil die Raumladungsbeträge am größten waren beim einfachen Versuch, und da beim einfachen Versuch außerdem nach 30 Min. Beharrungszustand eingetreten war, wurde  $t$  hier gleich 30 Min. genommen. Nach dem Kommutieren wird die Raumladung praktisch abgebaut, um dann wieder, jedoch nicht bis zu den früheren Werten, anzusteigen.

Kurzschlußversuch: Aus den gleichen Gründen, wie oben geschildert, wurde auch hier  $U_G = 30$  kV und  $t = 30$  Min. genommen. Nach dem Kurzschluß findet ein Abbau der Raumladung statt. Die Kurzschlußlinie lässt sich durch eine Exponentialfunktion wiedergeben. Diese lautet:

$$\alpha = -(28 e^{-0,044 t_0} + 2) \text{ Skt.}$$

Die Relaxationszeit ergibt sich zu 22,7 Min. und direkt aus der Kurve entnommen zu 23 Min. Da die Raumladung negativ ist, liegt es nahe, sie in Elektronen umzurechnen. Tut man das für diejenigen Elektronen, welche dem Abbau unterliegen, entsprechend der Konstanten 28 (Skalenteile), so erhält man die Elektronenzahl zu  $4,21 \cdot 10^9$ .

**Zusammenfassung und Schlußwort**

Die Untersuchungen des Erstarrungsvorganges von Bienenwachs unter Spannung (10 und 20 kV) ergaben beträchtliche Raumladungen und Gesamtladungen, die Probe wurde dabei meistens in elektrodenparallele Schichten zerschnitten. Die Untersuchungen an festem Bienenwachs unmittelbar nach der Erstarrung (Spannung meist 10 kV) ergaben, ebenfalls wieder unter Verwendung des Schnittverfahrens, daß je nach der Spannungsrichtung die Ergebnisse verschieden waren infolge der ungleichmäßigen Abkühlung der Probe; sie ergaben ferner, ohne Anwendung des Schnittverfahrens, bei Zimmertemperatur (Spannung 10, 20, 30 kV), eindeutige Ergebnisse und das Vorhandensein von Gesamtladung. In diesem zweiten Fall wurden bei 30 kV noch Kommutierungs- und Kurzschlußversuche unternommen.

Für die Anregung und stete Förderung dieser Arbeit möchte ich Herrn Prof. Dr.-Ing. W. O. Schumann herzlich danken. Der Notgemeinschaft der Deutschen Wissenschaft sei bestens gedankt für die leihweise Überlassung einer Anzahl von Apparaten.

Berlin-Siemensstadt.

(Eingegangen 8. Oktober 1934)

**Der Einfluß der Bindung  
auf den Wirkungsquerschnitt für Stöße  
sehr schneller Elektronen**

**Von Arnold Siegert<sup>1)</sup>**

**Inhalt:** Der Wirkungsquerschnitt für Elektronenstöße bestimmter Energieabgabe an ein Elektron der *K*-Schale wird in einem Grenzfall (Anfangs- und Endenergie des stoßenden Elektrons und Endenergie des gestoßenen von ein und derselben Größenordnung,  $\gg m c^2$ ) berechnet. Im I. Teil wird die Bindung nur für den Anfangszustand des gestoßenen Elektrons berücksichtigt. Im II. Teil wird gezeigt, daß der dabei auftretende wesentliche Einfluß der Bindung nicht etwa durch diese Vereinfachung nur vorgetäuscht ist.

**Problemstellung**

Es soll der Wirkungsquerschnitt für solche Stöße schneller Elektronen mit einem Elektron der *K*-Schale eines Atoms berechnet werden, bei denen das stoßende Elektron eine Energie zwischen  $Q$  und  $Q + dQ$  abgibt, und zwar in folgendem Grenzfall: Anfangsenergie des stoßenden Elektrons  $E_1^0 \gg m c^2$ , Restenergie des stoßenden Elektrons  $E_1^0 = E_1^0 - Q \gg m c^2$ , abgegebene Energie  $Q \gg m c^2$ ; das Verhältnis  $E_1^0/Q$  habe einen festen endlichen Wert von der Größenordnung 1.

Da die Bindungsenergie eines Elektrons auch für die *K*-Schale der schwersten Atome stets kleiner als  $m c^2$  ist, könnte man vermuten, daß der Wirkungsquerschnitt im betrachteten Grenzfall nicht von dem für ruhende freie Teilchen abweicht; denn, ob bei einem Stoß nur die sehr große Energie  $Q$  oder dazu noch die Bindungsenergie an das gestoßene Elektron übertragen wird, ist sicher belanglos. Es gibt jedoch gegen diese Auffassung Einwände, die den Sachverhalt sehr viel weniger trivial erscheinen lassen<sup>2)</sup>.

Wenn man überhaupt aus dem Verhalten freier Elektronen bei Stößen Schlüsse auf den Wirkungsquerschnitt eines im

1) Leipziger Dissertation.

2) Die folgenden Betrachtungen gehen zurück auf Diskussionen zwischen den Herren Prof. W. Heisenberg u. Prof. W. Pauli.

Atom gebundenen Elektrons ziehen will, so ist es das nächstliegende Verfahren, die Wirkung des Atomkerns unmittelbar vor dem Stoß „ausgeschaltet“ zu denken und Stöße an dem so entstehenden, aus ebenen Wellen zusammengesetzten Wellenpaket zu betrachten. In den Wirkungsquerschnitt eines isotrope Wellenpakets aus Elektronen der Geschwindigkeit  $\beta c$  geht nun aber, wie in Anhang IV gezeigt wird<sup>1)</sup>, — auch in dem von uns betrachteten Grenzfall — die Geschwindigkeit  $\beta c$  ein, und zwar ist dieser Wirkungsquerschnitt um den Faktor  $\sqrt{1 - \beta^2}$  kleiner als der für ruhende freie Elektronen. Also allen wegen der Geschwindigkeit des Elektrons im Atom ist schon eine Abweichung des Wirkungsquerschnittes gebundener von demjenigen ruhender freier Elektronen zu vermuten.

Weiter ist die Tatsache wesentlich, daß ein Wellenpaket, das auf die oben beschriebene Weise entstanden sein soll, Zustände negativer Energie enthält. Wie groß der Anteil dieser Zustände ist, ist durch die Kernladung bestimmt. Als Ausgangszustände des gestoßenen Elektrons für einen Stoßprozeß, bei dem an dieses eine Energie  $Q$  ( $2mc^2 < Q < E_1^0 - mc^2$ ) abgegeben wird, kommen wegen des Energie- und Impulsatzes nur diejenigen ebenen Wellen des Wellenpakets in Frage, deren Energie nicht zwischen  $-mc^2$  und  $-mc^2 - Q$  liegt. Dagegen können von den Zuständen negativer Energie aus Übergänge stattfinden, bei denen an das stoßende Elektron Energie abgegeben wird und das gestoßene Elektron sich auch nach dem Stoß in einem Zustand negativer Energie befindet. — Stoßprozesse dieser Art sind auch am gebundenen Elektron möglich, weil der Atomkern einen gewissen Impulsbetrag aufnehmen kann und somit der Impulssatz nicht mehr zwischen den Elektronen allein gilt. Nimmt man alle Zustände negativer Energie als besetzt und den Grundzustand des Atoms als unbesetzt an, so kann der Umkehrprozeß stattfinden: Es entsteht ein „Loch“ in der Besetzung der Zustände negativer Energie, d. h. ein positives Elektron, und das gestoßene Elektron besetzt den Grundzustand. — Auch diese Betrachtungen lassen vermuten, daß ein Einfluß der Bindung auf den Wirkungsquerschnitt besteht, sogar in unserem Grenzfall.

Über die Art und Größe dieses Einflusses kann man allerdings auf Grund von Überlegungen mit freien Elektronen

1) W. Pauli, *Helv. Phys. Acta*, Vol. VI, Fasc. IV, S. 279. 1933, hat für die Streuung von Licht an bewegten freien Elektronen im analogen Grenzfall auch einen Einfluß der Geschwindigkeit der streuenden Elektronen gefunden.

noch nichts aussagen, da ein wesentlicher Unterschied zwischen dem betrachteten Wellenpaket und dem gebundenen Elektron besteht: Im Wellenpaket hat jede ebene Welle die zu ihrem Impuls gehörige Energie, in die Rechnung mit dem gebundenen Elektron geht aber die Energie des Atomgrundzustandes ein. Deshalb wird im I. Teil dieser Arbeit die Rechnung mit den exakten Eigenfunktionen des Grundzustandes durchgeführt. Die Streuung von Licht an gebundenen Elektronen im analogen Grenzfall ist von H. Casimir<sup>1)</sup> berechnet worden.

### Teil I

Für die Rechnung werden folgende Vereinfachungen gemacht: Der Einfluß der übrigen Elektronen des Atoms wird vernachlässigt. Austauscheffekte sollen unberücksichtigt bleiben. Das stoßende Elektron wird vor und nach dem Stoß, das gestoßene nach dem Stoß als frei behandelt. Im zweiten Teile der Arbeit soll der Versuch gemacht werden, diese letzte Vereinfachung zu rechtfertigen.

Die Bezeichnung ist so durchgeführt, daß sich Größen mit dem unteren Index 1 stets auf das stoßende Elektron, 2 auf das gestoßene beziehen. Oberer Index 0 bedeutet: vor dem Stoß. Gestrichene Größen beziehen sich auf den Zustand nach dem Stoß. Unterer Index 0 bedeutet: Grundzustand des Atoms.  $E$  heißt stets Energie,  $p$  und  $\mathfrak{p}$  Impuls.  $\sigma$  (für kontinuierliche Zustände von 1—4) gibt den Spinzustand und das Vorzeichen der Energie an ( $\sigma = 3,4$  bedeutet positive Energie).  $s$  (von 1—4) ist die zugehörige Variable.

Nach Möller<sup>2)</sup> ist die Wahrscheinlichkeit für einen Stoß, bei dem das stoßende Teilchen aus einem Zustand  $\mathfrak{p}_1^0 \sigma_1^0$  in einen Zustand zwischen  $\mathfrak{p}_1' \sigma_1'$  und  $\mathfrak{p}_1' + d\mathfrak{p}_1', \sigma_1'$  übergeht und gleichzeitig das gestoßene Elektron vom Grundzustand nach einem Zustand zwischen  $\mathfrak{p}_2' \sigma_2'$  und  $\mathfrak{p}_2' + d\mathfrak{p}_2', \sigma_2'$  springt, so zu berechnen, daß man die Potentiale bildet, die zu dem Übergangsstrom und der Übergangsdichte des stoßenden Teilchens gehören, und mit einer Bornschen Störungsrechnung die Wahrscheinlichkeit des Übergangs des 2. Teilchens unter dem Einfluß dieser Potentiale berechnet. Da das stoßende Teilchen durch ebene Wellen dargestellt wird, erhält man als Potentiale<sup>3)</sup>:

1) H. Casimir, Helv. Phys. Acta, Vol. VI, Fasc. IV, S. 287. 1933.

2) Chr. Möller, Ann. d. Phys. [5] 14. S. 531. 1932; Ztschr. f. Phys.

70. S. 786. 1931.

3) Chr. Möller, Ztschr. f. Phys. 70. S. 786. 1931. Formeln (4), (5).

Annalen der Physik. 5. Folge. 21.

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\pi\hbar^2 e \frac{[\bar{a}_1' a_1^0]}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{Q}{c}\right)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1')\mathbf{r}}; \\ 4\pi\hbar^2 e \frac{[\bar{a}_1' \vec{a}^{(1)} a_1^0]}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{Q}{c}\right)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1')\mathbf{r}}, \end{array} \right. \quad (4)$$

also als Störungsenergie:

$$(2) e\Omega e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1')\mathbf{r}} = 4\pi\hbar^2 e^2 \frac{[\bar{a}_1' (1 - (\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}) a_1^0)]}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{Q}{c}\right)^2} e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1')\mathbf{r}},$$

wobei  $a_1^0, a_1'$  die zu  $\mathbf{p}_1^0 \sigma_1^0$  bzw.  $\mathbf{p}_1' \sigma_1'$  gehörigen Diracamplituden sind. Normiert sind alle Eigenfunktionen durch

$$\int [\bar{\psi} \psi] d\mathbf{r} = 1^1.$$

Eckige Klammern bezeichnen stets skalare Produkte der vierkomponentigen Größen. Die Komponenten von  $\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}$  sind die Diracschen Strommatrizen für das 1. bzw. 2. Elektron.

Der Wirkungsquerschnitt ergibt sich als Übergangswahrscheinlichkeit pro Zeiteinheit und Strom  $J_1^0 \approx \frac{e}{V}$ :

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(\mathbf{p}_1' \sigma_1', \mathbf{p}_2' \sigma_2') d\mathbf{p}_1' d\mathbf{p}_2' \\ = \frac{1}{J_1^0 \hbar^3} \left| \left( \mathbf{p}_2' \sigma_2' \right| e \Omega e^{\frac{i}{\hbar}(\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1')\mathbf{r}} \left| 0 \right) \right|^2 \\ \cdot \hbar \delta(E_1^0 - E_1' + E_0 - E_2) \frac{V^2}{\hbar^6} d\mathbf{p}_1' d\mathbf{p}_2'. \end{array} \right.$$

$\frac{V}{\hbar^6} d\mathbf{p}_{1,2}$  bedeutet dabei die Zahl der Zustände zwischen  $\mathbf{p}_{1,2} \sigma_{1,2}$  und  $\mathbf{p}_{1,2} + d\mathbf{p}_{1,2}, \sigma_{1,2}'$ . Um den Wirkungsquerschnitt für die Energieabgabe  $Q$  zu bekommen, hat man noch über alle Impulse des 2. Teilchens nach dem Stoß und alle Streuwinkel  $\theta' \varphi'$  des stoßenden Teilchens nach dem Stoß zu integrieren; die Integration über  $\varphi'$  gibt einen Faktor  $2\pi$ , weil der Integrand von  $\varphi'$  nicht abhängt. Der Einfachheit halber sei das 1. Teilchen vor dem Stoß polarisiert ( $\sigma_1^0 = 4$ ) angenommen, und auch nur der eine Grundzustand des Atomelektrons be-

1) Dabei geht das „Volumen des Koordinatenraumes“  $V$  in die Rechnung ein, das aber später wieder herausfällt.

rücksichtigt. Dann sind also folgende Integrationen und Summationen auszuführen:

$$(4)^1 \left\{ \begin{array}{l} \Phi(Q)dQ = 2\pi \frac{p_1' E_1'}{c^2} \frac{V^2}{\hbar^6} dQ \int_0^\pi \sin \Theta' d\Theta' \frac{1}{J_1' \hbar^2} \sum_{\sigma_1' = 3,4} \sum_{\sigma_1' = 3,4} \{ \} \\ \{ \} = \left\{ \int d\mathfrak{p}_2' \left| \left( \mathfrak{p}_2' \sigma_2' \right| e \Omega e^{\frac{i}{\hbar} (\mathfrak{p}_1^0 - \mathfrak{p}_1') \tau} |0\rangle \right|^2 \hbar \delta(Q + E_0 - E_2') \right\}, \end{array} \right.$$

wobei

$$d\mathfrak{p}_1' = p_1'^2 |d\mathfrak{p}_1'| \sin \Theta' d\Theta' d\varphi' = \frac{p_1' E_1'}{c^2} dQ \sin \Theta' d\Theta' d\varphi'$$

eingesetzt ist.

Das Matrixelement wird dann durch Definition eines Vektors

$$(5) \quad \mathfrak{p} = \mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2' - \mathfrak{p}_1^0$$

und einer vierkomponentigen Größe  $J$ :

$$(6) \quad J_s(\mathfrak{p}) = \int e^{-\frac{i}{\hbar} \mathfrak{p} \tau} \psi_0(\tau s) d\tau$$

so umgeformt:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \left( \mathfrak{p}_2' \sigma_2' \right| e \Omega e^{\frac{i}{\hbar} (\mathfrak{p}_1^0 - \mathfrak{p}_1') \tau} |0\rangle \right) \\ = \left[ \mathfrak{a}_2' e \Omega \int e^{-\frac{i}{\hbar} (\mathfrak{p}_1' + \mathfrak{p}_2' - \mathfrak{p}_1^0) \tau} \psi_0(\tau s) d\tau \right] \\ = [\mathfrak{a}_2' e \Omega J]. \end{array} \right.$$

Anschaulich bedeutet  $\mathfrak{p}$  den „Impuls des Elektrons im Atom“ oder  $-\mathfrak{p}$  den Impuls, den der Kern bei dem Stoßprozeß aufnimmt. Dieses  $\mathfrak{p}$  führt man nun statt  $\mathfrak{p}_2'$  als Integrationsvariable ein, da die Funktionen  $J_s$  von  $\mathfrak{p}$  in einfacherer Weise abhängen als von  $\mathfrak{p}_2'$ .

Es ist vorteilhaft, vor der  $\mathfrak{p}$ -Integration die  $\Theta'$ -Integration durchzuführen. Dabei ist der wesentliche Teil des Integranden die Deltafunktion der Energien, die über

$$E_2' = E_2'(\mathfrak{p}_2') = E_2'(\mathfrak{p}_1^0 + \mathfrak{p} - \mathfrak{p}_1')$$

1) Für negative Energien  $E_2'$  ist statt  $\sum_{\sigma_1' = 3,4} : \sum_{\sigma_1' = 1,2}$  zu nehmen.  
33\*

von  $\Theta'$  abhängt. Man bekommt

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_0^\pi \sin \Theta' d\Theta' \delta(Q + E_0 - E_2') \\ = \begin{cases} \frac{E_2' \sin \Theta}{c^2 p_1' [(p_1^0 + p_z) \sin \Theta - p_x \cos \Theta]}, \\ 0, \end{cases} \\ \quad \left( \begin{array}{l} \Theta \text{ definiert durch} \\ Q + E_0 - E_2' = 0 \end{array} \right), \end{array} \right.$$

wobei der erste Ausdruck für alle  $\mathbf{p}$ -Werte gilt, für die sich der Energiesatz und die Gl. (5) gleichzeitig befriedigen lassen, während für alle anderen Werte von  $\mathbf{p}$  das Integral verschwindet. (Dabei ist die  $p_z$ -Achse in Richtung  $\mathbf{p}_1^0$  gelegt, die  $p_x p_y$ -Ebene ist die Ebene von  $\mathbf{p}_1^0$  und  $\mathbf{p}_1'$ .) Der Energiesatz beschränkt also das Gebiet der  $\mathbf{p}$ -Integration, und zwar überzeugt man sich leicht, daß im betrachteten Limes großer  $Q$ ,  $E_1^0$  und  $E_1'$  das Integrationsgebiet im Falle  $Q > 0$  der Halbraum

$$(9a) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_z < \frac{E_0}{c} - \frac{mc}{2} \frac{mc^2}{Q} \frac{E_1^{02} + Q^2 - Q E_1^0}{E_1^0 (E_1^0 - Q)} \\ = \frac{E_0}{c} - \frac{mc}{2} \left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right), \end{array} \right.$$

im Falle  $Q < 0$  der Halbraum

$$(9b) \quad \left\{ \begin{array}{l} p_z > \frac{E_0}{c} + \frac{E_1^{02} + Q^2 - E_1^0 |Q|}{E_1^0 (E_1^0 + |Q|)} \frac{mc}{2} \frac{mc^2}{Q} \\ = \frac{E_0}{c} + \frac{mc}{2} \left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right) \end{array} \right.$$

ist.  $\left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right)$  heißt dabei „von der Größenordnung  $\frac{mc^2}{Q}$ “. Man kann sich wegen des raschen Abfalls der Impulsraumwellenfunktionen<sup>1)</sup>  $J_s$  auf ein Gebiet beschränken, in dem  $|\mathbf{p}|$  höchstens von der Größenordnung einiger  $mc$  wird. Dabei ist die Abweichung der Ebenen  $p_z = \frac{E_0}{c} \pm \frac{mc}{2} \left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right)$  von der wirklichen Begrenzungsfläche des Integrationsgebiets höchstens von der Größenordnung  $\frac{mc^2}{Q} mc$ .

Daß überhaupt Impulse  $|\mathbf{p}| \sim mc$  trotz ihrer geringen Wahrscheinlichkeit noch etwas zum Wirkungsquerschnitt beitragen, liegt daran, daß der in  $e\Omega$  auftretende Retardierungs-

1) Anhang II, S. 521, 522.

faktor  $\frac{1}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{Q}{c}\right)^2}$  an der Stelle  $p_z \cong \frac{E_0}{c}$  ein sehr starkes Maximum hat. Da nämlich für  $p_x, p_y \lesssim m c$  aus Gl. (5) folgender Zusammenhang zwischen  $\Theta$  und  $\mathbf{p}$  folgt:

$$(10) \quad \cos \Theta \cong 1 - \frac{Q E_0}{c^2 p_1^0 p_1'} \left(1 - \frac{c p_z}{E_0}\right),$$

wird

$$|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{Q}{c}\right)^2 = p_1^{02} + p_1'^2 - 2 p_1^0 p_1' \cos \Theta - \left(\frac{Q}{c}\right)^2 \\ \cong \frac{2 Q E_0}{c^2} \left(1 - \frac{c p_z}{E_0}\right).$$

Der Retardierungsfaktor wird also zwischen

$$p_z = 0 \quad \text{und} \quad p_z = \frac{E_0}{c} - \left(\left(\frac{m c^2}{Q}\right)\right) m c$$

um den Faktor  $Q/m c^2$  größer, so daß Stöße der letzteren Art in unserem Grenzfall begünstigt sind. Vernachlässigt sind bei der Berechnung von  $\cos \Theta$  Glieder von der Größenordnung

$$\frac{p_z}{p_1^0} \sqrt{\frac{2 Q E_0}{c^2 p_1' p_1^0} \left(1 - \frac{c p_z}{E_0}\right)} \quad \text{und} \quad \left(\frac{m c^2}{Q}\right)^2.$$

Da diese nur für  $1 - \frac{c p_z}{E_0} \cong \frac{m c^2}{Q}$  von derselben Größenordnung sind wie

$$\frac{2 Q E_0}{p_1^0 p_1' c^2} \left(1 - \frac{c p_z}{E_0}\right),$$

geben sie bei der Integration über  $\mathbf{p}$ , wie man sich durch die exakte Rechnung überzeugen kann, keinen wesentlichen Beitrag. Durch die Amplitudenprodukte<sup>1)</sup>:

$$(11) \quad \sum_{\alpha_1' = 3,4} \sum_{\alpha_2' = 3,4} \left| \left[ \vec{a}_1' \vec{a}_2' \left(1 - \left(\vec{\alpha}^{(1)}, \vec{\alpha}^{(2)}\right)\right) a_1^0 J \right] \right|^2 \\ \cong \frac{1}{2 V^3} \left\{ \left( |J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2 \right) \frac{2}{\frac{E_0'}{c} + m c} \right. \\ \left. \cdot \left( \frac{E_0'}{c} - (p_1^0 + p_z) + p_1' \cos \Theta \right) + |J_1|^2 \sin^2 \Theta \left(1 + 2 \frac{p_1'}{p_2'}\right) \right\},$$

$$(12) \quad \left\{ \left( |J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2 \right) \frac{2 c}{Q} \frac{E_0}{c} \left(1 - \frac{Q}{c p_1^0}\right) \left(1 - \frac{c p_z}{E_0}\right) \right. \\ \left. + |J_1|^2 \left(1 + 2 \frac{p_1'}{p_2'}\right) \frac{2 Q E_0}{c^2 p_1^0 p_1'} \left(1 - \frac{c p_z}{E_0}\right) \right\}$$

1) Berechnung im Anhang I.

(für positive Energieabgabe  $Q$ ) wird wegen des Faktors

$$\left(1 - \frac{c p_s}{E_0}\right)$$

der starke Anstieg des Integranden wieder geringer. Von der Integration über  $\Theta'$  [Formel (8)] kommt der Faktor

$$(13) \quad \frac{E_0' \sin \Theta}{c^2 p_1' [(p_1^0 + p_s) \sin \Theta - p_s \cos \Theta]} = \frac{E_0'}{c^2 p_1' p_1^0} k,$$

wobei  $k = 1$  ist, solange

$$1 - \frac{c p_s}{E_0} \gg \frac{m c^2}{Q} \quad \text{und} \quad k \gtrsim 1 \quad \text{für} \quad 1 - \frac{c p_s}{E_0} \sim \frac{m c^2}{Q}.$$

Setzt man diese Werte in Gl. (4) ein, so erhält man als Endformel

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(Q) dQ &= 2\pi \frac{p_1' E_0'}{c^2} \frac{V^2}{\hbar^6} dQ \frac{E_0'}{c^2 p_1' p_1^0} k \frac{1}{J_1^0 \hbar^2} \\ &\quad \cdot \int d\mathfrak{p} \frac{(4\pi \hbar^2 c^3)^2}{4 Q^2 E_0^2 \left(1 - \frac{c p_s}{E_0}\right)^2} \frac{1}{2 V^3} \left\{ \begin{array}{l} \text{aus} \\ \text{(12)} \end{array} \right\} h \\ &= 2\pi \frac{e^4}{E_0} \frac{dQ}{Q^2} \left(1 - \frac{Q}{E_1^0}\right)^2 \frac{k}{\hbar^6} \\ &\quad \cdot \int d\mathfrak{p} \left\{ \left[ (|J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2) + |J_1|^2 \left(1 + \frac{2p_1'}{p_2'}\right) \frac{Q^2}{E_1'^2} \right] \frac{1}{1 - \frac{c p_s}{E_0}} \right\} \end{aligned} \right.$$

wobei das Integral nach (9a) (für  $Q > 0$ ) über den linken Halbraum  $p_s \leq \frac{E_0}{c} - \frac{m c}{2} \left( \left( \frac{m c^4}{Q} \right) \right)$  zu erstrecken ist.Für  $Q < 0$  soll nur die Größenordnung des Wirkungsquerschnittes in  $m c^2/Q$  und  $Z/137$  festgestellt werden. Der Integrand bei der  $\mathfrak{p}$ -Integration unterscheidet sich für  $Q < 0$  nur im Amplitudenprodukt von dem im Falle  $Q > 0$  auftretenden. Für die Abschätzung der Größenordnung genügt es, sich auf das Glied mit  $J_4$  zu beschränken, da  $J_1$  und  $J_2$  für  $p \gg \frac{Z}{137} m c$  kleiner sind<sup>1)</sup>. Man erhält als Amplitudenprodukt im Falle  $Q < 0$ ,  $\sigma_1^0 = 4$ ,  $\sigma_1' = 4$ ,  $\sigma_2' = 1$ :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} \left| \left[ a_2' a_1' \left(1 - \left( \vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)} \right) a_1^0 J \right) \right|^2 \right| &= \frac{1}{2 V^8} |J_4|^2 \left( \frac{p_1'}{p_2'} \right)^2 \sin^2 \theta \\ &\simeq \frac{1}{2 V^8} |J_4|^2 \left( \frac{p_1'}{p_2'} \right)^2 \frac{2 Q E_0}{c^2} \frac{1}{p_1^0 p_1'} \left(1 - \frac{c p_s}{E_0}\right) \end{aligned} \right.$$

1) Anhang II, Formel (7).

und daraus als Endformel größtenordnungsmäßig

$$(16) \quad \Phi(Q) dQ \cong \frac{2\pi e^4}{E_0} \cdot \frac{dQ}{Q^2} \left( \frac{p_1'}{p_1^0} \right)^2 \frac{1}{h^3} \int d\mathbf{p} |J_4|^2 \frac{1}{1 - \frac{cp_z}{E_0}},$$

wobei nach (9b) über den rechten Halbraum

$$p_z > \frac{E_0}{c} + \frac{mc^2}{2} \left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right)$$

zu integrieren ist. Die weitere Auswertung verläuft ganz ähnlich wie bei Casimir<sup>1)</sup>: Man schreibt die beiden Integrale in folgender Form:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(Q) dQ &= \frac{2\pi e^4}{E_0} \frac{dQ}{Q^2} \left( 1 - \frac{Q}{E_1^0} \right)^2 \frac{k}{h^3} \\ &\cdot \int d\mathbf{p} \left\{ (|J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2) + |J_1|^2 \left( 1 + 2 \frac{p_1'}{p_1^0} \right) \frac{Q^2}{c^2 p_1'^2} \right\} \\ &\cdot \left( 1 + \frac{cp_z}{E_0} + \left( \frac{cp_z}{E_0} \right)^2 + \frac{\left( \frac{cp_z}{E_0} \right)^3}{1 - \frac{cp_z}{E_0}} \right), \end{aligned} \right.$$

$$(16') \quad \left\{ \begin{aligned} \Phi(Q) dQ &\sim \frac{2\pi e^4}{E_0} \frac{dQ}{Q^2} \left( 1 - \frac{Q}{E_1^0} \right)^2 \frac{1}{h^3} \int d\mathbf{p} |J_4|^2 \\ &\cdot \left( 1 + \frac{cp_z}{E_0} + \left( \frac{cp_z}{E_0} \right)^2 + \frac{\left( \frac{cp_z}{E_0} \right)^3}{1 - \frac{cp_z}{E_0}} \right). \end{aligned} \right.$$

Zur Auswertung der Glieder mit  $1, \frac{cp_z}{E_0}, \left( \frac{cp_z}{E_0} \right)^2$  in (14') darf man über den ganzen Impulsraum integrieren, wenn man dabei auf solche Terme höherer als 3. Ordnung in  $Z/137$  verzichtet, die im Limes  $Q \rightarrow \infty$  mit  $1/Q^2$  gegen 0 gehen. Es ist nämlich<sup>2)</sup> größtenordnungsmäßig

$$(17) \quad \frac{1}{h^3} \int_{p \geq \frac{E_0}{c}}^{\infty} \left( \frac{cp}{E_0} \right)^2 |J_4|^2 p^2 dp \sim \left( \frac{Z}{137} \right)^{2\lambda+3}; \quad \lambda = \sqrt{1 - \left( \frac{Z}{137} \right)^2}.$$

Die Integration über den Impulsraum läßt sich dann in eine Integration über den Koordinatenraum umformen. Man erhält:

1) H. Casimir, a. a. O.

2) Anhang II, Formel (9).

$$(18) \quad \frac{1}{\hbar^3} \int |J_1|^2 d\mathfrak{p} \simeq \int \bar{\psi}_1 \psi_1 d\mathfrak{r} = \frac{1}{3} \frac{\gamma_z^3}{1 + \lambda} \simeq \frac{1}{6} \gamma_z^2$$

mit

$$\gamma_z = \frac{Z}{137}, \quad \psi_z = \psi_0(\mathfrak{r} s).$$

$$(19) \quad \frac{1}{\hbar^3} \int |J_2 - J_4|^2 d\mathfrak{p} \simeq \int d\mathfrak{r} (|\psi_2|^2 + |\psi_4|^2)$$

wegen

$$\text{also} \quad \bar{\psi}_2 = -\psi_2; \quad \bar{\psi}_4 = \psi_4,$$

$$(20) \quad \frac{1}{\hbar^3} \int (|J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2) d\mathfrak{p} = 1.$$

$$(21) \quad \frac{1}{\hbar^3} \int |J_1|^2 p_z d\mathfrak{p} = 0$$

aus Symmetriegründen.

$$(22) \quad \frac{1}{\hbar^3} \int |J_2 - J_4|^2 p_z d\mathfrak{p} = \frac{\gamma_z^3 m c}{3 \lambda} \simeq \frac{\gamma_z^3}{3} m c,$$

$$(23) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\hbar^3} \int (|J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2) p_z^2 d\mathfrak{p} = \\ - \hbar^2 \int \left( \bar{\psi}_1 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_1 + \bar{\psi}_2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_2 + \bar{\psi}_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_4 \right) d\mathfrak{r}. \end{array} \right.$$

Die ersten beiden Glieder liefern nur einen Beitrag von der Ordnung  $\gamma_z^4$ .

$$(24) \quad - \hbar^2 \int \bar{\psi}_4 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \psi_4 d\mathfrak{r} \simeq \frac{\gamma_z^3}{3} m^2 c^2$$

bis auf Glieder 4. Ordnung.

Den Faktor  $1/E_0$  kann man auch noch nach  $\gamma_z$  entwickeln:

$$(25) \quad \frac{1}{E_0} \simeq \frac{1}{m c^2} \left( 1 + \frac{\gamma_z^3}{2} \right).$$

Das letzte Glied, das für  $Q < 0$  maßgebend ist [wegen (17)], wird in folgender Weise berechnet:

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\hbar^3} \int d\mathfrak{p} \frac{\left( \frac{c p_z}{E_0} \right)^3}{1 - \frac{c p_z}{E_0}} \{ \} \\ p_z \ll \frac{E_0}{c} - m c \left( \left( \frac{m c^2}{Q} \right) \right) \\ \text{bzw. } p_z \geq \frac{E_0}{c} + m c \left( \left( \frac{m c^2}{|Q|} \right) \right) \\ \sim \frac{1}{\hbar^3} \frac{E_0}{c} \ln \left( \left( \frac{Q}{m c^2} \right) \right) \int d\mathfrak{p}_x d\mathfrak{p}_y |J_4|^2 \Big|_{p_z = \frac{E_0}{c}} \sim \left( \frac{Z}{137} \right)^{24+3} \ln \frac{Q}{m c^2} \end{array} \right.$$

da

$$(27) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\hbar^2} \int d\mathbf{p} \left( \frac{cp_z}{E_0} \right)^2 |J_4|^2 \sim \left( \frac{Z}{137} \right)^4 \\ p_z < \frac{E_0}{c} - mc \left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right) \end{array} \right.$$

und  $|J_2 - J_4|^2$  an der Stelle  $p_z \sim \frac{E_0}{c}$  durch  $|J_4|^2$  ersetzt werden kann.

Man erhält also als Wirkungsquerschnitt für positive Energieabgabe

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi(Q) dQ = \frac{2\pi e^4}{mc^2} \frac{dQ}{Q^2} \left( 1 - \frac{Q}{E_1^0} \right)^2 \\ \cdot \left\{ 1 + \left( \frac{Z}{137} \right)^2 \left[ \frac{7}{6} + \frac{1}{6} \frac{Q}{E_1'} \left( \frac{Q}{E_1'} + 2 \right) \right] \right. \\ \left. + \left( \left( \frac{Z}{137} \right)^4 \right) + k' \left( \frac{Z}{137} \right)^{2\lambda+3} \lg \frac{Q}{mc^2} \right\}, \end{array} \right.$$

für negative Energieabgabe

$$(29) \quad \Phi(Q) dQ \sim \frac{2\pi e^4}{mc^2} \frac{dQ}{Q^2} \left( 1 - \frac{Q}{E_1^0} \right)^2 \left( \frac{Z}{137} \right)^{2\lambda+3} \lg \frac{Q}{mc^2}.$$

$k'$  ist von der Ordnung  $1$ .  $2\lambda + 3$  kann für  $Z \ll 137$  durch  $5 - \left( \frac{Z}{137} \right)^2$  ersetzt werden.

Die Abweichung des Ergebnisses (28) von der Möllerschen<sup>1)</sup> Formel im Falle  $Z = 0$  bedeutet keinen Widerspruch, da bei Möller Austauscheffekte berücksichtigt sind. Das Auftreten eines Gliedes mit  $\left( \frac{Z}{137} \right)^2$ , das auch im betrachteten Grenzfall nicht verschwindet, war nicht ohne weiteres zu erwarten. Es kann aber durch Betrachtungen<sup>2)</sup> analog denen von W. Pauli<sup>3)</sup> plausibel gemacht werden. Völlig unplausibel erscheint jedoch zuerst das Auftreten des logarithmischen Gliedes, wenn man bedenkt, daß dadurch das Verhältnis des Wirkungsquerschnittes gebundener Teilchen zu dem freier Teilchen immer größer wird, je größer die abgegebene Energie ist. Das Auftreten dieses Gliedes, das übrigens ganz analog dem von Casimir<sup>4)</sup> angegebenen ist, kann man nur so erklären, daß Stöße, die bei freien Teilchen durch Energie- und Impulssatz ausgeschlossen sind, dadurch ermöglicht werden, daß wegen der Bindung der Impulssatz verletzt werden kann. Casimir<sup>4)</sup> bringt das Auftreten von Stößen, die das Logarith-

1) Chr. Möller, Ann. d. Phys. [5] **14**. S. 531. 1932. Formel (76).

2) Anhang IV.

3) W. Pauli, a. a. O.

4) H. Casimir, a. a. O.

musglied in seiner Rechnung verursachen, in Analogie mit dem Photoeffekt, da auch dieser nur an gebundenen Teilchen möglich ist. Um in unserem Fall plausibel zu machen, daß durch die Bindung eine neue Art von Stößen ermöglicht wird, sei an die Stöße erinnert, bei denen das Elektron aus der *K*-Schale in einen Zustand negativer Energie springt. Wirklich tritt bei Übergängen zu negativer Energie gerade das Logarithmusglied als höchstes Glied auf<sup>1)</sup>). Diese Analogie — und auch die Ähnlichkeit mit der Casimirschen Rechnung — wird dadurch noch vergrößert, daß die Logarithmusglieder in beiden Fällen von „Impulsen des Atomelektrons“ aus der Umgebung von  $p_z = \frac{E_0}{c}$ ;  $p_x \lesssim mc$ ;  $p_y \lesssim mc$  ( $p_z$ -Achse  $\uparrow\downarrow p_1^0$ ) herkommen, und zwar nach (9) für  $Q \geq 0$ , wenn man von  $p_z \leq \frac{E_0}{c}$  her der Ebene  $p_z = \frac{E_0}{c}$  nahekommt. Die Formeln für negative Energien können noch etwas umgedeutet werden: Die Umkehrung dieses Prozesses ergibt nämlich folgenden Vorgang: Das gestoßene Teilchen ist zuerst in einem Zustand negativer Energie ( $-Q + E_0$ ) und wird durch einen Stoß mit der Energieabgabe  $Q$  in die *K*-Schale gehoben; — man muß natürlich voraussetzen, daß in dieser ein Platz unbesetzt ist. — Dabei entsteht ein „Loch“ in den Zuständen negativer Energie, d. h. bekanntlich ein positives Elektron mit der Energie  $|Q| - E_0$ . Um mit der üblichen Definition des Wirkungsquerschnitts für die Entstehung von Paaren in Einklang zu bleiben, hat man in (3)  $\frac{V}{h^3} d p_1'$  durch  $\frac{V}{h^3} d p_1^0$  zu ersetzen, da  $p_1^0 \sigma_1^0$  jetzt der Endzustand des stoßenden Teilchens ist. Man erhält also:

$$(30) \quad \Phi(Q) dQ \sim \frac{2\pi e^4}{mc^3} \frac{dQ}{Q^2} \left(\frac{Z}{137}\right)^{21+3} \lg \frac{Q}{mc^2}.$$

Der hier auftretende Logarithmus hat zwar ebensowenig wie das Logarithmusglied in Gl. (28) experimentell prüfbare Konsequenzen für das Problem der Bremsung von Elektronen, trotzdem wird man es als sehr unplausibel empfinden, daß sich der Einfluß der Bindung am meisten für die Stöße großer Energieabgabe bemerkbar macht, daß sogar der Wirkungsquerschnitt für Stöße mit Energieabgabe  $Q$  und Paarerzeugung in der oben beschriebenen Art bei wachsendem  $Q$  beliebig viel größer wird als der Wirkungsquerschnitt für Stöße an freien ruhenden Elektronen mit derselben Energieabgabe.

1) Nach einer freundlichen brieflichen Mitteilung von Herrn Dr. Casimir ist auch im Falle stoßender Lichtquanten das Auftreten eines Logarithmusgliedes bei Übergängen zu negativer Energie zu vermuten.

## Teil II

Das Auftreten des Logarithmusgliedes ist durch die bisherige Rechnung noch nicht sichergestellt, weil — statt mit den exakten Eigenfunktionen des gestoßenen Elektrons nach dem Stoß und des stoßenden Elektrons — mit ebenen Wellen gerechnet worden ist. Solange man das Ergebnis der Rechnung nicht kannte, erschien es als selbstverständlich, daß diese Approximation im betrachteten Grenzfall erlaubt sei. Nunmehr muß man jedoch befürchten, daß an dem befremdenden Auftreten des Logarithmusgliedes gerade diese Vereinfachung schuld sein könnte.

Allerdings hat man ein Argument für dieses Verfahren. Wenn nämlich die Wirkung des Kerns bei einer bestimmten Energie  $E \gg m c^2$  in irgendeiner endlichen Entfernung  $R$  vom Kern einmal unwesentlich wird, so darf man sie für die Energie  $nE$  schon in einer Entfernung  $R/n$  vernachlässigen. Es folgt nämlich aus der Diracgleichung, daß für  $E \gg m c^2$

$$\psi_E(r) \simeq \text{const } \psi_{nE}\left(\frac{r}{n}\right)$$

ist. Nun wird man vermuten, daß diejenigen Stöße, von denen das Logarithmusglied herröhrt, ungefähr in einem mittleren Abstand  $\frac{\hbar}{mc}$  vom Kern vor sich gehen, weil der Impulssatz gerade um  $mc$  verletzt wird. Man könnte demnach die Energie stets so hoch wählen, daß der Einfluß des Kerns bei den fraglichen Stößen unwesentlich wird.

Gerade für den Fall des Coulombfeldes ist es jedoch unsicher, ob die Voraussetzung dieser Argumentation wahr ist: Die Eigenfunktionen im Coulombfeld sind auch in beliebig großer Entfernung vom Kern und — im relativistischen Falle — auch für beliebig große Energie von denen freier Teilchen um ein Logarithmusglied im Exponenten verschieden<sup>1)</sup>; die Abschirmung kann in unserem Falle noch nicht wirksam sein. Nun weiß man aber gar nicht, ob diese Abweichung wesentlich oder unwesentlich für unsere Rechnung ist. Das erstere ist sogar wahrscheinlicher, da das Logarithmusglied im Exponenten eine Unschärfe des Impulses bedeutet: Denkt man einmal die Bindung des gestoßenen Teilchens vor dem Stoß aufgehoben, so müssen in einem Wirkungsquerschnitt, der mit ebenen Wellen im Endzustand berechnet ist, triviale Weise alle Glieder mit  $Z$  wegfallen, während das natürlich nicht der Fall ist, wenn man mit den exakten Eigenfunktionen gerechnet hat.

1) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London 135. S. 429. 1932.

Man kann weiter gegen die Verwendung der ebenen Wellen einwenden, daß das Logarithmusglied gerade von solchen Stößen stammt, bei denen nach Gl. (10) der Streuwinkel sowohl des stoßenden als auch des gestoßenen Elektrons wesentlich kleiner ist als der aus Energie- und Impulsatz für freie Teilchen folgende. Die exakten Eigenfunktionen stellen nun eine Streuung dar, und es könnte sein, daß dadurch das Verbleiben des Elektrons im kritischen Winkelbereich viel weniger wahrscheinlich ist, als man bei der Verwendung ebener Wellen voraussetzt.

Da eine Klärung aller dieser Einwände auch von der Verwendung der ersten Bornschen Näherung statt der ebenen Wellen allein nicht zu erwarten ist, wurde in Anhang III mit den exakten Wellenfunktionen gerechnet. Dort ist das höchste Glied einer Entwicklung des Wirkungsquerschnitts  $\Phi_l(Q)dQ$  für einen Übergang des gestoßenen Elektrons in einen Zustand  $E'_2 = E_0 + Q$ , ( $Q \ll -mc^2$ ),  $l, j = l + \frac{1}{2}$ <sup>1)</sup> im bisher betrachteten Grenzfall  $|Q| \rightarrow \infty$ ,  $E'_1 \rightarrow \infty$ ,  $E'_1 \rightarrow \infty$ ,  $\frac{E'_1}{E'_0} \sim 1$  berechnet worden. Entwickelt wurde nach  $Q/mc^2$  und dann das Ergebnis noch einmal nach  $\frac{Z}{137}$ .  $Q < -mc^2$  wurde gewählt, weil dabei in der bisherigen Rechnung das fragliche Logarithmusglied als erstes Glied auftrat. Die Wechselwirkung des stoßenden Elektrons mit dem Kern wurde als unwesentlich für das Prinzipielle des Problems vernachlässigt. Aus demselben Grunde wurden von den möglichen Übergängen des ersten Teilchens nur  $\sigma_1^0 = 3 \rightarrow \sigma_1' = 3$  und  $\sigma_1^0 = 4 \rightarrow \sigma_1' = 4$  berücksichtigt.

Man erhielt für gebundene Elektronen im Endzustand:

$$\Phi_l(Q) dQ \simeq \frac{2\pi e^4}{mc^2} \cdot \frac{dQ}{Q^2} \frac{E_1'^2}{Q^2} (l+1) \frac{4}{\pi} \gamma_z^{3+2\beta} \\ (\beta = \sqrt{1-\gamma_z^2} - 1)$$

und für freie Elektronen im Endzustand:

$$\Phi_l^0(Q) dQ \simeq \frac{2\pi e^4}{mc^2} \frac{dQ}{Q^2} \frac{E_1'^2}{Q^2} (l+1) \frac{2}{\pi} \gamma_z^{5+2\beta}.$$

Man sieht, daß das Logarithmusglied des ersten Teils im betrachteten Grenzfall  $Q \rightarrow \infty$  nicht von den kleinen Drehimpulsen herkommt, daß also die Stöße, die es verursachen,

1) Bezeichnungen nach H. Geiger u. K. Scheel, *Handbuch der Physik*, Bd. XXIV, 1. Teil, Kap. 3, I A 2, Ziff. 7-9; im folgenden einfach mit *Handbuch* zitiert.

nicht die kernnächsten Stöße sind. Im Verlaufe der Rechnung konnte man übereinstimmend damit feststellen, daß es für jede endliche Drehimpulsquantenzahl erlaubt gewesen wäre — im Limes  $Q \rightarrow \infty$  — mit den asymptotischen Entwicklungen der Eigenfunktionen zu rechnen.

Da unser Ergebnis für jeden endlichen Drehimpuls gilt, ist bewiesen, daß für  $Q \rightarrow \infty$  die Größe  $Q^2 \Phi(Q)$  beliebig groß wird, daß also dieses unplatible Ergebnis der Rechnungen des ersten Teils gerechtfertigt ist; übrigens, wie man aus dem Verlauf der Rechnung sieht, für positive und negative Werte von  $Q$ .

Während so das unplatible Unendlichwerden des Verhältnisses vom Wirkungsquerschnitt gebundener Elektronen zu dem freier Elektronen sichergestellt ist, gibt die Rechnung keine Auskunft über die Art des Unendlichwerdens. Doch darf man wegen der — abgesehen von der Potenz von  $Z/137$  — gleichen Form der Ergebnisse für den Wirkungsquerschnitt für freie und gebundene Elektronen im Endzustand schließen, daß dieses Unendlichwerden auch in Form eines Logarithmusgliedes geschieht, daß also, wenn man die Summierung über die  $l$  durchführen könnte, ein Logarithmusglied auftrete, und zwar schon mit dem Faktor  $\left(\frac{Z}{137}\right)^3$ . Diese Abweichung kann man damit plausibel machen, daß das Logarithmusglied von Stößen herrührt, bei denen ein Impuls an den Kern abgegeben wird. Durch die Berücksichtigung der Bindung auch im Endzustand gibt es mehr Möglichkeiten für diese Impulsausgabe, als wenn man das Elektron im Endzustand als frei betrachtet.

#### Anhang I

Die Amplitudenprodukte sind auf folgende Weise gewonnen: Man faßt  $a_{\sigma p}(s)$  als Element einer Matrix:  $a_{\sigma \sigma}(p)$  auf. Aus

$$(1) \quad [-c(\vec{a}, p) - a_m m c^2] a_{\sigma p} = E_{\sigma p} a_{\sigma p}$$

mit

$$E_{\sigma p} = \pm W, \quad W = c \sqrt{p^2 + m^2 c^2}$$

folgt für  $a_{\sigma \sigma}(p)$  die Gleichung

$$(2) \quad [-c(\vec{a}, p) - a_m m c^2] a(p) = -a(p) W a_m,$$

die gelöst wird durch

$$(3) \quad a(p) = -n c \left[ (\vec{a} p) + a_m \left( m c + \frac{W}{c} \right) \right]$$

mit beliebigem  $n$ .

Man erhält dann die gesuchten Produkte als Elemente einer Matrix. Es ist nämlich:

$$(4) \quad [\bar{a}_{\sigma'} \mathfrak{p}' \Omega a_{\sigma} \mathfrak{p}] = \sum_{s s'} \bar{a}_{\sigma' \mathfrak{p}'}(s) \Omega(s s') a_{\sigma \mathfrak{p}}(s'),$$

$$(5) \quad = \sum_{s s'} \underline{a}_{\sigma' \mathfrak{p}'}^+(s') \Omega(s s') \underline{a}_{\sigma' \mathfrak{p}}(s'),$$

wobei  $\underline{a}^+$  die transponierte und komplex konjugierte Matrix zu  $\underline{a}$  ist. Da die Diracmatrizen hermitesch sind, folgt hieraus:

$$(5') \quad [\bar{a}_{\sigma' \mathfrak{p}'} \Omega a_{\sigma} \mathfrak{p}] = (\underline{a}(\mathfrak{p}') \Omega \underline{a}(\mathfrak{p}))_{\sigma' \sigma}.$$

Der Faktor  $n$  wird durch die Normierungsbedingung

$$[\bar{a}_{\sigma \mathfrak{p}} a_{\sigma' \mathfrak{p}'}] = \frac{\delta_{\sigma \sigma'}}{V} = (\underline{a}^2)_{\sigma \sigma'}$$

festgelegt:

$$(6) \quad n = \frac{1}{\sqrt{2 V W (W + m c^2)}}.$$

Die Produkte  $[\bar{a}_2 \Omega J]$  erhält man ähnlich als Komponenten der VierergröÙe  $[\underline{a} \Omega J]$ :

$$(7) \quad [\bar{a}_2 \Omega J] = (\underline{a}(\mathfrak{p}_2) \Omega J)_{\sigma_2' \sigma}.$$

Das Verfahren ist ähnlich dem von Sauter<sup>1)</sup> angegebenen.

Für die GröÙen

$$(8) \quad A = [\bar{a}_1' a_1^0], \quad \mathfrak{A} = [\bar{a}_1' \vec{a} a_1^0]$$

erhält man so:

	$\sigma_1^0 = 3 \rightarrow \sigma_1' = 3$	$\sigma_1^0 = 3 \rightarrow \sigma_1' = 4$	$\sigma_1^0 = 4 \rightarrow \sigma_1' = 3$	$\sigma_1^0 = 4 \rightarrow \sigma_1' = 4$
$\frac{2 V}{\eta_1' \eta_1^0} A$	$\cos \Theta + \zeta_1' \zeta_1^0$	$-\zeta_1' \zeta_1^0 \sin \Theta$	$\zeta_1' \zeta_1^0 \sin \Theta$	$1 + \zeta_1' \zeta_1^0 \cos \Theta$
$\frac{2 V}{\eta_1' \eta_1^0} \mathfrak{A}_x$	$-\sin \Theta \cdot \zeta_1'$	$\zeta_1^0 - \zeta_1' \cos \Theta$	$-\zeta_1^0 + \zeta_1' \cos \Theta$	$-\zeta_1' \sin \Theta$
$\frac{2 V}{\eta_1' \eta_1^0} \mathfrak{A}_y$	$-i \sin \Theta \cdot \zeta_1'$	$i(\zeta_1' \cos \Theta - \zeta_1^0)$	$i(-\zeta_1^0 + \zeta_1' \cos \Theta)$	$i \zeta_1' \sin \Theta$
$\frac{2 V}{\eta_1' \eta_1^0} \mathfrak{A}_z$	$-\zeta_1^0 - \cos \Theta \cdot \zeta_1'$	$\zeta_1' \sin \Theta$	$-\zeta_1' \sin \Theta$	$-\zeta_1^0 - \zeta_1' \cos \Theta$
	$\mathfrak{A}_x + i \mathfrak{A}_y = 0$	$\mathfrak{A}_x - i \mathfrak{A}_y = 0$	$\mathfrak{A}_x + i \mathfrak{A}_y = 0$	$\mathfrak{A}_x - i \mathfrak{A}_y = 0$

Dabei bedeuten die Abkürzungen:

$$(9) \quad \zeta_1 = \frac{p_1}{p_{1m}} \quad \text{mit} \quad p_{1m} = \frac{m c^2 + |E_1|}{c},$$

$$(10) \quad \eta_1 = \sqrt{\frac{W_1 + m c^2}{W_1}},$$

$$(11) \quad \zeta_1, \eta_1 \approx 1 \quad \text{bis auf Glieder} \quad \left( \left( \frac{m c^2}{Q} \right) \right).$$

1) F. Sauter, Ztschr. f. Phys. 63. S. 803. 1930.

Die Übergänge  $3 \rightarrow 4$ ,  $3 \rightarrow 3$  sind nur der Vollständigkeit halber aufgeführt.

Für  $\sigma_3' = 3$  erhält man auf dem oben angegebenen Wege exakt:

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \left[ \bar{a}_2' \bar{a}_1' \left( 1 - (\vec{a}^{(1)}, \vec{a}^{(2)}) \right) a_1^0 J \right] &= \left[ \bar{a}_2' \left( A - (\vec{a}^{(1)}, \vec{a}) \right) J \right] \\ &= \frac{1}{V\sqrt{V}} \frac{c p_{2'm}}{\sqrt{2W_2'(W_2' + mc^2)}} \left\{ J_1 \left( -A \zeta_2' \cos \Theta_2 - \mathfrak{A}_z \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_2 \left( -A \zeta_2' \sin \Theta_2 e^{-i\varphi_2} - (\mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y) \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + J_4 \left( -\mathfrak{A}_z \sin \Theta_2 e^{-i\varphi_2} + \zeta_2' \cos \Theta_2 (\mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y) \right) \right\}. \right. \end{aligned} \right.$$

Dabei sind  $p_{2'm}$ ,  $\Theta_2$ ,  $\varphi_2$  die Polarkoordinaten von  $\mathfrak{p}_2$  im  $\mathfrak{p}$ -Raum;  $W_2' = |E_y'|$ ,  $\zeta_2'$ ,  $p_{2'm}$  sind genau so definiert, wie die entsprechenden Größen mit dem Index 1.

Für  $\sigma_2' = 4$  hat der  $\{\cdot\}$ -Faktor die Gestalt:

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} \left\{ J_1 \left( -\zeta_2' \sin \Theta_2 e^{i\varphi_2} A - \mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y \right) + J_2 \left( \zeta_2' \cos \Theta_2 A + \mathfrak{A}_z \right) \right. \\ \left. + J_4 \left( \zeta_2' \sin \Theta_2 e^{i\varphi_2} (\mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y) + A + \zeta_2' \cos \Theta_2 \mathfrak{A}_z \right) \right\}. \end{aligned} \right.$$

Berücksichtigt man noch, daß  $\sin \Theta_2, \sin \Theta_2 \leq \left( \sqrt{\frac{mc^2}{Q}} \right)$  und

$$(14) \quad \frac{\mathfrak{A}_z}{A} = -1 - \left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right)$$

ist, außerdem, daß  $\mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y \equiv 0$  für den Übergang  $\sigma_1^0 = 4$ ,  $\sigma_1' = 4$  ist, so gilt unter Vernachlässigung von Gliedern  $\left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right)^{1/2} J_s$ :

$$(15) \quad \left\{ \begin{aligned} [\sigma_1^0 = 4, \sigma_1' = 4, \sigma_2' = 3] \\ = \frac{1}{V\sqrt{2V}} \{ J_1 (1 - \zeta_2' \cos \Theta_2) - \zeta_2' \sin \Theta_2 e^{-i\varphi_2} (J_2 - J_4) \}. \end{aligned} \right.$$

$$(16) \quad \left\{ \begin{aligned} [\sigma_1^0 = 4, \sigma_1' = 4, \sigma_2' = 4] \\ = \frac{1}{V\sqrt{2V}} \{ -J_1 \zeta_2' \sin \Theta_2 e^{i\varphi_2} + J_1 \zeta_2' \sin \Theta_2 - (1 - \zeta_2' \cos \Theta_2) (J_2 - J_4) \}, \end{aligned} \right.$$

$$(17) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\sigma_2' = 3,4} [\quad] = \frac{1}{2V^2} \{ (|J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2) (1 - 2\zeta_2' \cos \Theta_2 + \zeta_2'^2) \\ + |J_1|^2 (\zeta_2'^2 \sin^2 \Theta_2 - 2\zeta_1' \zeta_2' \sin \Theta_2 \sin \Theta_2 \cos \varphi_2) \\ - \zeta_1' \sin \Theta_2 (1 - \zeta_2' \cos \Theta_2) [\bar{J}_1 (J_2 - J_4) + J_1 (\bar{J}_2 - \bar{J}_4)] \}. \end{aligned} \right.$$

Das 2. Glied kann unter Benutzung von Gl. (5) aus Teil I umgeformt werden in

$$\zeta_1' \sin \Theta \left( \zeta_1' \sin \Theta - 2 \frac{p_2 - p_1' \sin \Theta}{p_{2'm}} \right)$$

und für  $|\mathfrak{p}| \lesssim mc$  unter Vernachlässigung von Gliedern  $\left( \left( \frac{mc^2}{Q} \right) \right) \sin \Theta$

$$\text{in: } \sin^2 \Theta \left( 1 + \frac{2p_1'}{p_{2'}} \right).$$

Die Berechtigung zu dieser Vernachlässigung erhält man erst durch die spätere Integration über  $p_s$ . Auch der Faktor

$$\sin \Theta (1 - \zeta_2' \cos \Theta_2) \quad (1)$$

wird nicht größer als  $\frac{mc^3}{Q} \sin \Theta$ , so daß man schließlich erhält:

$$(18) \quad \left\{ \sum_{\sigma_1' = 3,4} \left| \left[ \bar{a}_2' (A - (\vec{a}^{(0)} \vec{a}^{(0)}) J) \right] \right|^2 \right. \\ = \left\{ (|J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2) (1 - 2\zeta_2' \cos \Theta_2 + \zeta_2'^2) \right. \\ \left. + |J_1|^2 \sin^2 \Theta \left( 1 + 2 \frac{p_1'}{p_2'} \right) \right\} \cdot \frac{1}{2V^3}.$$

Da der Übergang  $\sigma_1^0 = 4 \rightarrow \sigma_1' = 3$  nichts Wesentliches beträgt, darf man nach Einsetzen des Wertes für  $\cos \Theta_2$  aus (5) schreiben:

$$(19) \quad \left\{ \sum_{\sigma_1' = 3,4} \sum_{\sigma_2' = 3,4} \left| \left[ \right] \right|^2 = \frac{1}{2V^3} \left\{ (|J_1|^2 + |J_2 - J_4|^2) \frac{2}{\frac{E_2'}{c} + mc} \right. \\ \left. + \left( \frac{E_2'}{c} - (p_1^0 + p_s) + p_1' \cos \Theta \right) + |J_1|^2 \sin^2 \Theta \left( 1 + 2 \frac{p_1'}{p_2'} \right) \right\}.$$

Für den Übergang zu einem Zustand negativer Energie ( $\sigma_2' = 1$ ) erhält man:

$$(20) \quad \left\{ \left[ \bar{a}_2' \bar{a}_1' \left( 1 - (\vec{a}^{(1)} \vec{a}^{(0)}) \right) a_1^0 J \right] = \frac{cp_2'm}{\sqrt{2}W_2'(W_2' + mc^2)} \frac{1}{\sqrt{V}} \left\{ \right\}, \right. \\ \left. \left\{ \right\} = \{J_1 (-A + \sin \Theta e^{-i\varphi_2} \zeta_2' (\mathfrak{A}_x + i\mathfrak{A}_y) + \zeta_2' \mathfrak{A}_x \cos \Theta_2) \right. \\ \left. + J_2 (-\sin \Theta_2 e^{-i\varphi_2} \zeta_2' \mathfrak{A}_x + \cos \Theta_2 \zeta_2' (\mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y)) \right. \\ \left. + J_4 (-A \sin \Theta_2 e^{-i\varphi_2} \zeta_2' + (\mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y)) \right\}. \right. \quad (3)$$

Für den Übergang  $\sigma_1^0 = 4, \sigma_1' = 4, \sigma_2' = 1$  fällt der Faktor  $\mathfrak{A}_x - i\mathfrak{A}_y$  weg. Da es hier nur auf die Größenordnung ankommen soll, kann man sich auf das Glied mit  $J_4$  beschränken:

$$(21) \quad \left[ \left[ \right] \right] \simeq \frac{1}{V\sqrt{2V}} J_4 (-\sin \Theta_2 e^{-i\varphi_2}), \text{ wobei } A \simeq -2 \text{ und } \zeta_2' \simeq 1 \text{ gesetzt ist. Man erhält also}$$

$$(22) \quad \left| \left[ \left[ \right] \right] \right|^2 = \frac{1}{2V^2} |J_4|^2 \sin^2 \Theta_2 \simeq \frac{1}{2V^2} |J_4|^2 \frac{p_1'^2}{p_2'^2} \sin^2 \Theta.$$

## Anhang II

Das in der Rechnung benutzte System von Eigenfunktionen des Grundzustandes<sup>1)</sup> lautet:

1) Z.B.: C. G. Darwin, Proc. Roy. Soc. London 118. S. 654. (1928); H. Casimir, a. a. O. (dort andere Indizesreihenfolge).

$$(1) \quad \begin{cases} \psi_1 = NC(x - iy)r^{\lambda-2}e^{-ra} \\ \psi_2 = N(-C)zr^{\lambda-2}e^{-ra} \\ \psi_3 = 0 \\ \psi_4 = -Nr^{\lambda-1}e^{-ra}. \end{cases}$$

Dabei bedeuten die Abkürzungen

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \psi_0(r, s), \quad N^2 = \frac{1}{8\pi}(1 + \lambda) \frac{(2\alpha)^{2\lambda+1}}{\Gamma(2\lambda+1)}, \\ \gamma_z &= \frac{Z}{137}, \quad a = \gamma_z \frac{mc}{\hbar}, \quad \lambda = \frac{E^0}{mc^2} = \sqrt{1 - \gamma_z^2}^{-1}, \\ C &= \frac{i\gamma_z}{1 + \lambda}. \end{aligned}$$

Die Reihenfolge der Indizes ist hier nach dem Handbuch gewählt.

$$(2) \quad \begin{cases} J_z = \int e^{-\frac{i}{\hbar}pt} \psi_z d\tau, \\ J_1 = \frac{p_z - i p_y}{mc} W, \\ J_2 = -\frac{p_y}{mc} W, \\ J_3 = 0, \\ J_4 = V. \end{cases}$$

$$(3) \quad V = N\Gamma(\lambda+1) \left( \frac{-2\pi}{a^{\lambda+2}} \right) i \frac{\hbar\alpha}{p} \left( \frac{1}{\left(1 + i \frac{p}{\hbar\alpha}\right)^{\lambda+1}} - \frac{1}{\left(1 - i \frac{p}{\hbar\alpha}\right)^{\lambda+1}} \right).$$

$$(4) \quad \begin{cases} W = \left( \frac{2\pi}{a^{\lambda+2}} \right) N\Gamma(\lambda) i \left( \frac{\hbar\alpha}{p} \right)^3 \frac{1}{1+\lambda} \left\{ \left( \frac{1}{\left(1 + i \frac{p}{\hbar\alpha}\right)^{\lambda}} - \frac{1}{\left(1 - i \frac{p}{\hbar\alpha}\right)^{\lambda}} \right. \right. \\ \left. \left. + i\lambda \frac{p}{\hbar\alpha} \left( \frac{1}{\left(1 + i \frac{p}{\hbar\alpha}\right)^{\lambda+1}} + \frac{1}{\left(1 - i \frac{p}{\hbar\alpha}\right)^{\lambda+1}} \right) \right\}. \end{cases}$$

Durch Entwicklung von  $V$  und  $W$  für  $p \gg \hbar\alpha$  erhält man:

$$(5) \quad \begin{cases} V \sim N\Gamma(\lambda+1) \left( -\frac{2\pi}{a^{\lambda+2}} \right) \left\{ \left( \frac{\hbar\alpha}{p} \right)^{\lambda+2} 2 \sin(1-\lambda) \frac{\pi}{2} \right. \\ \left. + (\lambda+1) \left( \frac{\hbar\alpha}{p} \right)^{\lambda+3} 2 \cos(1-\lambda) \frac{\pi}{2} \right\}. \end{cases}$$

1) Im Teil II und Anhang III wird statt  $\lambda$  die Größe  $\beta = \sqrt{1 - \gamma_z^2} - 1$  benutzt, damit man in Anlehnung an das Handbuch die Größe  $\frac{mc}{\hbar} \sqrt{1 - \left( \frac{E_0'}{mc^2} \right)^2}$  mit  $\lambda$  bezeichnen kann.

Für kleine  $Z$  ist  $1 - \lambda \cong \frac{1}{2} \left( \frac{Z}{137} \right)^2$ , so daß für  $p < \frac{137}{Z} mc$  das Glied  $\left( \frac{\hbar \alpha}{p} \right)^{\lambda+3}$  überwiegt.

$$(6) \quad W \sim \left( \frac{2\pi}{\alpha^{\lambda+2}} \right) N I^*(\lambda) \left( \frac{\hbar \alpha}{p} \right)^{\lambda+3} 2 \sin \left( \lambda \frac{\pi}{2} \right).$$

Für  $\hbar \alpha \ll p < \frac{137}{Z}$  gilt:

$$(7) \quad V \sim -\lambda(\lambda+1) W,$$

also  $|V| > |W|$  und  $|V| - |W|$  von der Größenordnung  $|V|$ .

Die Entwicklung von  $V^*$  an der Stelle  $p = \frac{E_0}{c}$  nach  $\gamma_z = \frac{Z}{137}$  ergibt

$$(8) \quad |V^*|_{p=\frac{E_0}{c}} \sim 64\pi \left( \frac{\hbar}{mc} \right)^3 \gamma_z^2 \lambda^2.$$

Außerdem braucht man noch die Größenordnung von:

$$(9) \quad \frac{1}{\hbar^3} \int_{p > \frac{E_0}{c}} \frac{p^2}{\left( \frac{E_0}{c} \right)^2} V^* p^* d p \sim \gamma_z^2 \lambda^2.$$

### Anhang III

Der Wirkungsquerschnitt  $\Phi_{l'mj}(Q) dQ$  für einen Stoß mit einer Energieabgabe zwischen  $Q$  und  $Q + dQ$ , bei dem sich das gestoßene Elektron nach dem Stoß in einem Zustand befindet, der durch die Quantenzahlen  $l, m, j = l \pm \frac{1}{2}$  gekennzeichnet ist, wird — analog Gl. (3, 4) in Teil I — gegeben durch:

$$(1) \quad \left\{ \Phi_{l'mj}(Q) dQ = \frac{p_1' E_1'}{c^2} dQ \int \frac{V}{\hbar^3} \sin \Theta' d\Theta' d\Phi' d\Phi' \frac{\hbar}{E_1' \hbar^2} \cdot \left| \int d\tau \left[ \bar{\psi}_{E_1' l'mj} e \mathcal{Q} e^{\frac{i}{\hbar} (p_1^0 - p_1') \tau} \psi_0 \right] \right|^2 \right\}.$$

Über die Deltafunktion in den Energien ist bereits integriert, man hat dann  $E_1' = Q + E_0$  zu setzen. Um  $\Phi(Q) \cdot dQ$  zu erhalten, hätte man über  $l, m, j$  zu summieren.  $e \mathcal{Q}$  ist in Teil I, Gl. (2) definiert und wird aus Anhang I übernommen. Normiert ist im kontinuierlichen Spektrum durch

$$(2) \quad \int d\tau [\bar{\psi}_{E' l' m' j'}(\tau) \psi_{E'' l'' m'' j''}(\tau)] = \delta_{l' l''} \delta_{m' m''} \delta_{j' j''} \delta(E'' - E'),$$

im Grundzustand durch

$$(3) \quad \int [\bar{\psi}_0 \psi_0] d\tau = 1.$$

Das Matrixelement ist von der Form:

$$(4) \quad \left\{ \sum_{s s'} \int \bar{\psi}_{E_1' l'mj}(\tau s) \left( A - \left( \alpha^{(2)}, \mathfrak{A} \right) \right)_{s s'} e^{i q z} \psi_0(\tau s') d\tau = A (J_{11} + J_{33} + J_{33} + J_{44}) - \mathfrak{A}_x (J_{13} - J_{34} + J_{31} - J_{43}) - (\mathfrak{A}_x + i \mathfrak{A}_y) (J_{33} + J_{41}) - (\mathfrak{A}_x - i \mathfrak{A}_y) (J_{33} + J_{44}) \right\}.$$

das Glied

Dabei ist die  $+z$ -Richtung durch  $\psi_1^0 - \psi_1'$  definiert; die Abkürzungen bedeuten:

$$(5) \quad A = [\bar{a}_1' \ a_1^0], \quad \mathfrak{A} = [\bar{a}_1' \ \overrightarrow{a}^{(1)} \ a_1^0],$$

$$(6) \quad J_{ss'} = \int \psi_{E_1' l m j}(\mathbf{r} s) e^{i q z} \psi_0(\mathbf{r} s') d\mathbf{r}.$$

Zur Entscheidung der gestellten prinzipiellen Frage soll nur eine Art Eigenfunktionen des Endzustandes herangezogen werden, nämlich die für  $j = l + \frac{1}{2}$ ; dann ist  $\psi_{E_1' l m j}(\mathbf{r} s)$  gegeben durch<sup>1)</sup>:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{l} s = 1: - \sqrt{\frac{l - m + \frac{3}{2}}{2l + 3}} i \tilde{f}(r) \bar{Y}_{l+1}^{m - \frac{1}{2}} \\ s = 2: - \sqrt{\frac{l + m + \frac{3}{2}}{2l + 3}} i \tilde{f}(r) \bar{Y}_{l+1}^{m + \frac{1}{2}} \\ s = 3: + \sqrt{\frac{l + m + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \tilde{g}(r) \bar{Y}_l^{m - \frac{1}{2}} \\ s = 4: - \sqrt{\frac{l - m + \frac{1}{2}}{2l + 1}} \tilde{g}(r) \bar{Y}_l^{m + \frac{1}{2}} \end{array} \right.$$

Die Eigenfunktionen des Grundzustandes sind in Anhang II, S. 521 aufgeschrieben, es sei nur noch die Abkürzung:

$$(8) \quad \sqrt{1 - \gamma_s^2} - 1 = \beta$$

eingeführt. Da  $\psi_0(\mathbf{r} 3) = 0$  ist, fallen alle  $J_{s3}$  weg. Die Winkelintegrationen in den  $J_{ss'}$  lassen sich leicht ausführen, wenn man  $e^{i q z}$  nach Kugelflächenfunktionen entwickelt:

$$(9) \quad e^{i q z} = e^{i q r \cos \vartheta} = \sum_{l'=0}^{\infty} c_{l'}(q r) Y_{l'}^0(\cos \vartheta).$$

Dann hat man Integrale der Form:

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \vartheta d\vartheta \bar{Y}_{l+1}^{m \pm \frac{1}{2}} Y_{l'}^0 \left\{ \begin{array}{c} \sin \vartheta e^{-i q \varphi} \\ \cos \vartheta \\ 1 \end{array} \right\},$$

wobei die erste Kugelflächenfunktion von  $\psi_{E_1' l m}$ , die zweite vom  $e^{i q z}$  herkommt, die restlichen Faktoren stammen von den Eigenfunktionen des Grundzustandes.

Die  $J_{ss'}$  erhält man dann in einer solchen Form:

1) Handbuch, Kap. 3, Ziffer 9.

$$(10) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{11} = \int_0^\infty - \sqrt{\frac{l+2}{2l+2}} i \tilde{f}(r) \delta_{m,-\frac{1}{2}} C N r^\beta e^{-r^\alpha} \\ \quad \cdot \left\{ -c_l \sqrt{\frac{(l+1)(l+2)}{(2l+1)(2l+3)}} + c_{l+2} \sqrt{\frac{(l+2)(l+1)}{(2l+5)(2l+3)}} \right\} r^2 dr \end{array} \right.$$

u.s.w., von den  $l'$  der  $\sum_l$  fallen alle bis auf  $l-1, l, l+1, l+2$  weg.  
Die Integrale lassen sich dann in dieser Weise zusammenfassen:

$$(11) \quad J_{11} + J_{22} + J_{44} = N \delta_{m,-\frac{1}{2}} \sqrt{\frac{l+1}{2l+1}} [i C F_l + G_l],$$

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{31} - J_{34} - J_{43} = N \delta_{m,-\frac{1}{2}} \left\{ - \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} \frac{1}{2l+1} G_{l+1} C \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \sqrt{\frac{l+1}{2l-1}} \frac{2l}{2l+1} G_{l-1} C \right. \right. \\ \quad \left. \left. - \sqrt{\frac{l+1}{2l+3}} i F_{l+1} \right\} \right.$$

Dabei ist

$$(13) \quad F_{l'} = \int_0^\infty \tilde{f}(r) c_{l'}(q r) r^\beta e^{-r^\alpha} r^2 dr,$$

$$(14) \quad G_{l'} = \int_0^\infty \tilde{g}(r) c_{l'}(q r) r^\beta e^{-r^\alpha} r^2 dr$$

mit  $l' = l-1, l, l+1$ , da die Glieder mit  $l' = l+2$  bei der Zusammenfassung weggefallen sind. Die Faktoren von  $\mathfrak{A}_x \pm i \mathfrak{A}_y$  sind nicht mit aufgeschrieben, da für die Übergänge  $\sigma_1^0 \rightarrow \sigma_1'$ , die wir berücksichtigen werden,  $\mathfrak{A}_x$  und  $A$  mindestens um den Faktor  $\sqrt{\frac{Q}{m c^2}}$  größer sind als  $|\mathfrak{A}_x \pm i \mathfrak{A}_y|$ , und die Größenordnung der  $F_{l'}, G_{l'}$  in bezug auf  $Q/m c^2$  in dem behandelten Falle — wie sich später herausstellen wird — nicht von  $l$  und  $l'$  abhängt.

Es handelt sich jetzt darum, die Integrale  $F_{l'}, G_{l'}$  auszuwerten. Die Funktionen  $\tilde{f}, \tilde{g}$  sind gegeben als<sup>1)</sup>:

$$(15) \quad r \tilde{f} = \sqrt{1-s} e^{-i\pi\gamma} \frac{\tilde{n}'}{|\tilde{n}'|} e^{-i\tau} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

$$(16) \quad r \tilde{g} = -\sqrt{1+s} e^{-i\pi\gamma} \frac{\tilde{n}'}{|\tilde{n}'|} e^{-i\tau} (\varphi_1 - \varphi_2),$$

1) Handbuch, Kap. 3, Ziff. 9b, e.

wobei

$$s = \frac{E_2'}{m c^2}, \quad \lambda = \frac{m c}{\hbar} \sqrt{1 - s^2},$$

$$(17) \quad q_1 = - \frac{C' n'}{\mu} (2\lambda r)^\gamma F(-\eta s + \gamma + 1, 2\gamma + 1, 2\lambda r),$$

$$(18) \quad q_2 = C' \mu (2\lambda r)^\gamma F(-\eta s + \gamma, 2\gamma + 1, 2\lambda r),$$

mit

$$n' = \eta s - \gamma, \quad \eta = \frac{\gamma_s}{\sqrt{1 - s^2}}, \quad \gamma_s = \frac{Z}{137},$$

$$\eta s \rightarrow \mp i \gamma_s \quad \text{für } s \rightarrow \pm \infty,$$

$$\mu = \sqrt{l + 1 + \eta}, \quad \gamma = \sqrt{(l + 1)^2 - \gamma_s^2}.$$

Der Normierungsfaktor  $C'$  wird später noch explizit angegeben. Entsprechend der Zerlegung von  $f$  und  $g$  werden auch  $F_{l'}$  und  $G_{l'}$  zerlegt:

$$(19) \quad F_{l'} = \sqrt{1 - s} e^{-i\pi\gamma} \frac{\bar{n}'}{|n'|} [J_{q_1}(l') - J_{q_2}(l')],$$

$$(20) \quad G_{l'} = -\sqrt{1 + s} e^{-i\pi\gamma} \frac{\bar{n}}{|n'|} [J_{q_1}(l') + J_{q_2}(l')],$$

wobei die Integrale

$$(21) \quad J_{q_1, q_2}(l') = \int_0^\infty e^{-\lambda r} q_1 c_{l'} r^{\beta + 1} e^{-\alpha r} dr$$

bedeuten.

Diese lassen sich als Summen von  $l'$  Gliedern — die Glieder sind im wesentlichen hypergeometrische Funktionen mit 4 Argumenten<sup>1)</sup> — darstellen, wenn man die Funktionen

$$c_{l'} \text{ prop. } \sqrt{\frac{1}{q r}} J_{l' + \frac{1}{2}}(q r)$$

in dieser Form schreibt:

$$(22) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{l'} = 2\sqrt{\pi} \sqrt{2l'+1} \Gamma(l'+1) \sum_{k=0}^l L_k (2i q)^{-k-1} \\ \quad \cdot \{r^{-k-1} e^{iqr} - (-1)^{l'-k} r^{-k-1} e^{-iqr}\}. \end{array} \right.$$

$$(23) \quad L_k = \binom{-l'-1}{k} \frac{1}{(l'-k)!}.$$

Man kann dann Summation und Integration vertauschen und die einzelnen Integrationen nach der Formel<sup>2)</sup>:

$$(24) \quad \int_0^\infty e^{-A r} r^B F(\alpha, \beta, 2\lambda r) dr = A^{-(B+1)} \Gamma(B+1) F\left(B+1, \alpha, \beta, \frac{2\lambda}{A}\right)$$

1) Vgl. z. B. Whittaker u. Watson, Modern Analysis, Kap. 14.

2) F. Sauter, Ann. d. Phys. [5] 9. S. 217. 1931.

ausführen, dann erhält man:

$$(25) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{\varphi_1}(l') = - \frac{C' n'}{\mu} (2\lambda)^{\gamma} 2 \sqrt{\pi} \sqrt{2l'+1} \Gamma(l'+1) \\ \cdot \sum_{k=0}^{l'} L_k (2i)^{-k-1} \{ K_1(k) - (-1)^{l'-k} K_1'(k) \}, \end{array} \right.$$

$$(26) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{\varphi_1}(l') = C' \mu (2\lambda)^{\gamma} 2 \sqrt{\pi} \sqrt{2l'+1} \Gamma(l'+1) \\ \cdot \sum_{k=0}^{l'} L_k (2i)^{-k-1} \{ K_2(k) - (-1)^{l'-k} K_2'(k) \} \end{array} \right.$$

mit

$$(27) \quad K_{\frac{1}{2}}(k) = q^{-k-1} \frac{\Gamma(a')}{(\lambda + \alpha - iq)^{a'}} F \left( -\eta \varepsilon + \gamma + \delta, a', 2\gamma + 1, \frac{2\lambda}{\lambda + \alpha - iq} \right),$$

$$(28) \quad K'_{\frac{1}{2}}(k) = q^{-k-1} \frac{\Gamma(a')}{(\lambda + \alpha + iq)^{a'}} F \left( -\eta \varepsilon + \gamma + \delta, a', 2\gamma + 1, \frac{2\lambda}{\lambda + \alpha + iq} \right).$$

Dabei ist  $\delta = 1$  für die  $K_1$  und  $\delta = 0$  für die  $K_2$ , und

$$(29) \quad a' = \gamma + \beta - k + 1.$$

Übrigens folgt aus  $\bar{e}_\nu = (-1)^{\nu} e_\nu$  und

$$(30) \quad \bar{e}^{-i\pi\gamma} \bar{q}_2 = - e^{-i\pi\gamma} \frac{\bar{n}'}{|n'|} e^{-i\pi\gamma} q_1,$$

daß

$$(31) \quad \bar{J}_{\varphi_1}(l') = (-1)^{\nu+1} e^{-i\pi\gamma} \frac{\bar{n}'}{|n'|} J_{\varphi_1}(l')$$

ist.

Zur Ermöglichung der weiteren Auswertung wird jetzt das Problem in folgender Weise begrenzt: Es wird gezeigt, wie sich der Wirkungsquerschnitt

$$\Phi_{l, j = l + \frac{1}{2}}(Q) dQ = \sum_m \Phi_{l, m, j}(Q) dQ$$

( $l$  endlich) verhält, wenn  $Q/mc^2$  gegen  $-\infty$  strebt. Die Bedingungen:  $E_1^0 \rightarrow \infty$ ,  $E_1' \rightarrow \infty$  und  $E_1^0/E_1'$  endlich, von der Größenordnung 1 werden beibehalten. Wegen des starken Abfalls des Retardierungsfaktors

$\frac{1}{|\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left(\frac{Q}{c}\right)^2}$  für Impulssatzverletzungen  $\gg mc$  darf man sich auf

Werte von  $|s|$ :

$$s = -i\hbar\lambda - \hbar q$$

beschränken, die höchstens von der Größenordnung einiger  $mc$  sind. Darum gilt für die Argumente der hypergeometrischen Funktionen in (27) und (28):

$$(32) \quad \left| \frac{2\lambda}{\lambda + \alpha - iq} \right| \rightarrow \infty,$$

$$(33) \quad \left| \frac{2\lambda}{\lambda + \alpha + iq} \right| \rightarrow 1 \quad \text{mit} \quad \frac{Q}{mc^2} \rightarrow \infty.$$

Die Größen  $K_{1,2}(k)$ ,  $K'_{1,2}(k)$  lassen sich dann entwickeln<sup>1)</sup>; man erhält so z. B. für  $K_{1,2}(k)$ :

$$(34) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{1,2}(k) = \left( \frac{-2\lambda}{q} \right)^{k+1} (-2\lambda)^{-\gamma-\beta-2} \frac{\Gamma(2\gamma+1)}{\Gamma(\gamma+\delta-\eta s)} \\ \quad \cdot \left\{ \frac{\Gamma(a') \Gamma(-\eta s + \delta - \beta - 1 + k)}{\Gamma(\gamma + k - \beta)} F_a \right. \\ \quad \left. + \frac{\Gamma(\gamma + \delta - \eta s) \Gamma(\eta s - \delta + \beta + 1 - k)}{\Gamma(\gamma + 1 - \delta + \eta s)} \left( \frac{-2\lambda}{\alpha + i \frac{s}{\hbar}} \right)^{\alpha' + \eta s - \gamma - \delta} F_b \right\}, \end{array} \right.$$

wobei  $F_a$ ,  $F_b$  hypergeometrische Funktionen von  $\frac{\alpha + i \frac{s}{\hbar}}{2\lambda}$  sind, die gleich

1 gesetzt werden dürfen, weil ja  $\left| \frac{\alpha + i \frac{s}{\hbar}}{2\lambda} \right|$  von der Größenordnung  $mc^2/Q$  ist.

Das höchste Glied in den  $K_{1,2}(k)$  bei der Entwicklung nach  $\frac{\alpha \pm i \frac{s}{\hbar}}{2\lambda}$  ist in  $K_2(0)$  das Glied:

$$(35) \quad \left\{ \begin{array}{l} (-i\lambda)^{-1} (-2\lambda)^{-a} \frac{\Gamma(2\gamma+1) \Gamma(\eta s + \beta + 1)}{\Gamma(\gamma + 1 + \eta s)} \left( \frac{-2\lambda}{\alpha + i \frac{s}{\hbar}} \right)^{\beta + \eta s + 1} \\ a = a' \Big|_{k=0} = \gamma + \beta + 1. \end{array} \right.$$

Entsprechend entwickelt man  $K'_{1,2}$  und findet hier ein höchstes Glied in  $K'_1(0)$  vor:

$$(36) \quad (-i\lambda)^{-1} (2\lambda)^{-a} \frac{\Gamma(2\gamma+1) \Gamma(\beta - \eta s + 1)}{\Gamma(1 + \gamma - \eta s)} \left( \frac{2\lambda}{\alpha - i \frac{s}{\hbar}} \right)^{\beta + 1 - \eta s}.$$

Diese beiden Glieder hätten wir gerade erhalten, wenn wir nicht die exakten, sondern die asymptotischen Wellenfunktionen benutzt hätten. Nach unseren Voraussetzungen dürfen wir uns in (25) und (26) auf diese Glieder beschränken und erhalten:

$$(37) \quad J_{\varphi_1}(l') = \sqrt{2l'+1} (-1)^l R \Psi_1,$$

$$(38) \quad J_{\varphi_2}(l') = \sqrt{2l'+1} R \Psi_2.$$

1) Whittaker u. Watson, Modern Analysis. 1920. Kap. 14, S. 289  
[diese Formel muß aber heißen:

$$\begin{aligned} & \frac{\Gamma(a) \Gamma(b)}{\Gamma(c)} F(a, b, c, Z) \\ &= \frac{\Gamma(a) \Gamma(b-a)}{\Gamma(c-a)} (-Z)^{-a} F(a, 1-c+a, 1-b+a, Z^{-1}) \\ &+ \frac{\Gamma(b) \Gamma(a-b)}{\Gamma(c-b)} (-Z)^{-b} F(b, 1-c+b, 1-a+b, Z^{-1}) \end{aligned}$$

und S. 291.

Dabei ist  $R$  unabhängig von  $l'$  (weil  $L_0 \Gamma(l'+1) = 1$  ist) und bedeutet:

$$(39) \quad R = C' 2 \sqrt{\pi} (-i\lambda)^{-1} \Gamma(2\gamma + 1) \frac{i}{2}.$$

Auch  $\Psi_1$  und  $\Psi_2$  sind von  $l'$  unabhängig und enthalten  $\lambda$  nur mit rein imaginären Exponenten:

$$(40) \quad \Psi_1 = - \frac{n'}{\mu} \frac{\Gamma(\beta - \eta s + 1)}{\Gamma(\gamma - \eta s + 1)} (2\lambda)^{-\eta s} \left( \alpha - i \frac{s}{\hbar} \right)^{\eta s - 1 - \beta},$$

$$(41) \quad \Psi_2 = (-1)^{-\gamma + 1} \mu \frac{\Gamma(\beta + \eta s + 1)}{\Gamma(\gamma + \eta s + 1)} (-2\lambda)^{\eta s} \left( \alpha + i \frac{s}{\hbar} \right)^{-\eta s - 1 - \beta}.$$

Unter Vernachlässigung von 1 gegen  $s$  in  $\sqrt{1 \pm s}$  und mit Verwendung der Abkürzung

$$(42) \quad \sqrt{|s|} e^{-i\pi s} \frac{\bar{n}'}{|n'|} = B$$

bekommt man dann aus Gl. (19) und (20)

$$(43) \quad F_{l'} = \sqrt{2l'+1} R B [(-1)^{l'} \Phi_1 - \Phi_2],$$

$$(44) \quad G_{l'} = i \sqrt{2l'+1} R B [(-1)^{l'} \Phi_1 + \Phi_2].$$

Die Größenordnung dieser Ausdrücke in  $Q/m c^2$  hängt nicht von  $l'$  ab, wodurch die Vernachlässigung der Glieder mit  $\mathfrak{A}_x \pm i \mathfrak{A}_y$  gerechtfertigt ist.

Aus (43), (44), (4), (11) und (12) erhält man jetzt das gesuchte Matrixelement:

$$(45) \quad \left\{ \sum_{s s'} \int \bar{\Psi}_{E_{s'} l j m}(\tau s) [A - (\vec{\alpha}^{(2)}, \mathfrak{A})]_{s s'} e^{i Q s} \psi_0(\tau s') d\tau \right. \\ = (A - \mathfrak{A}_s) N \delta_{m, -\frac{1}{2}} \sqrt{l+1} i R B \\ \left. \cdot \{ C [(-1)^l \Psi_1 - \Psi_2] + [(-1)^l \Psi_1 + \Psi_2] \} \right\}.$$

Dabei soll ein Übergang des stoßenden Teilchens  $\sigma_1^0 = 3 \rightarrow \sigma_1' = 3$  (oder  $\sigma_1^0 = 4 \rightarrow \sigma_1' = 4$ ) vorausgesetzt werden, so daß

$$(46) \quad A - \mathfrak{A}_s = \frac{1 + \cos \Theta'}{V}$$

ist<sup>1)</sup>. Setzt man jetzt das Matrixelement (45) in Gl. (1) ein, so ergibt sich

$$(47) \quad \left\{ \Phi_{l, j = l + \frac{1}{2}}(Q) dQ = \sum_m \frac{p_1' E_1'}{c^2} dQ \frac{V^2}{\hbar^2} \frac{16\pi^2 \hbar^3 e^4}{c} \right. \\ \left. \cdot \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin \Theta' d\Theta' d\varphi'}{\left( |\mathfrak{p}_1^0 - \mathfrak{p}_1'|^2 - \left( \frac{Q}{c} \right)^2 \right)^2} \frac{(1 + \cos \Theta')^2}{V^2} \right. \\ \left. \cdot N^2 \delta_{m, -\frac{1}{2}} (l+1) |R|^2 |B|^2 \left| \left\{ \text{aus (45)} \right\} \right|^2 \right\}.$$

1) Anhang I, S. 518.

bedeutet:

mit rein

- 1 -

wendung

von  $\gamma$  ab,  
ertrigt ist  
gesuchte $\Psi_1$  ] .  
 $\sigma_1' = 3$ 

bt sich

Aus

$$(48) \quad C'^2 = \frac{l+1}{4\pi} e^{i\pi\eta\varepsilon} \frac{1}{\hbar c |\varepsilon|} \frac{|\Gamma(\eta s + \gamma)|^2}{\Gamma^2(2\gamma + 1)} \quad (1)$$

(gültig für große  $s$ ) erhält man

$$(49) \quad |R|^2 = \frac{l+1}{4} e^{i\pi\eta\varepsilon} \frac{\hbar}{m^2 c^3 |\varepsilon|^3} |\Gamma(\eta s + \gamma)|^2.$$

Die Integration über  $\Theta'$  läßt sich leicht ausführen, da man wegen des raschen Abfalls des Retardationsfaktors ein Winkelgebiet in der unmittelbaren Umgebung von  $\Theta' = 0$  finden kann, das so groß ist, daß nur von diesem Gebiet ein wesentlicher Beitrag kommt und doch genügend klein, so daß man im Klammerausdruck für  $s : -\frac{E_0}{c}$  einsetzen kann. Man hat dann

$$(50) \quad \int_0^\pi \frac{\sin \Theta' d\Theta'}{\left( |\mathbf{p}_1^0 - \mathbf{p}_1'|^2 - \left( \frac{Q}{c} \right)^2 \right)^2} \approx \frac{1}{2p_1^0 p_1' m^2 c^2} \frac{E_1^0 E_1'}{Q^2}.$$

Setzt man dies ein und entwickelt das Ergebnis nach  $\gamma_z = \frac{Z}{137}$ , so erhält man als höchstes Glied für gebundene Teilchen im Endzustand ( $\eta s = i\gamma_z$ ) bis auf Faktoren von der Größenordnung 1:

$$(51) \quad \left\{ \Phi_l(Q) dQ \approx \frac{2\pi e^4}{m c^2} \frac{dQ}{Q^2} \frac{E_1'^2}{Q^2} (l+1) \frac{8}{\pi} \gamma_z^{3+2\beta} \cdot \sin^2 \left[ \gamma_z \lg \frac{2|Q+E_0|}{E_0} + \sigma \right], \right.$$

wobei  $\sigma$  definiert ist durch

$$(52) \quad \frac{\Gamma(\beta + \eta s + 1)}{\Gamma(\gamma + \eta s + 1)} = e^{i\sigma} \left| \frac{\Gamma(\beta + \eta s + 1)}{\Gamma(\gamma + \eta s + 1)} \right|.$$

Im betrachteten Grenzfall darf man noch statt

$$\sin^2 \left[ \gamma_z \lg \frac{2|Q+E_0|}{E_0} + \sigma \right]$$

den Mittelwert einsetzen und erhält:

$$(53) \quad \Phi_l(Q) dQ \approx \frac{2\pi e^4}{m c^2} \frac{dQ}{Q^2} \frac{E_1'^2}{Q^2} (l+1) \frac{4}{\pi} \gamma_z^{3+2\beta}.$$

Für den Fall freier Teilchen im Endzustand hat man in Gl. (47) bis (49)  $\eta s = 0$  und  $\gamma = l+1$  zu setzen. Dabei fällt das Glied mit  $\gamma_z^{3+2\beta}$  gerade fort, und man erhält:

$$(54) \quad \Phi_l^0(Q) dQ \approx \frac{2\pi e^4}{m c^2} \frac{dQ}{Q^2} \frac{E_1'^2}{Q^2} (l+1) \frac{2}{\pi} \gamma_z^{5+2\beta}$$

ebenfalls bis auf Faktoren der Ordnung 1.

#### Anhang IV

Es soll der Wirkungsquerschnitt eines Wellenpaketes aus ebenen Wellen mit isotroper Impulsverteilung im Limes  $E_1^0 \rightarrow \infty$ ,  $E_1' \rightarrow \infty$ ,  $Q \rightarrow \infty$

1) Vgl. z. B. F. Sauter, Ann. d. Phys. [5] 9. S. 238. 1931, dort für die Normierung nach Wellenzahlen angegeben.

berechnet werden<sup>1)</sup>, wobei  $Q/E_1^0$  beim Limesübergang fest bleiben soll. Dies kann analog der Arbeit von W. Pauli<sup>2)</sup> für jede einzelne Geschwindigkeitsrichtung so geschehen, daß man in dem Bezugssystem, in dem das gestoßene Elektron anfangs ruht, die Formel von Meller<sup>3)</sup> für den Wirkungsquerschnitt ruhender Elektronen anwendet und dann auf das ursprüngliche Bezugssystem zurücktransformiert.

Von den Bezeichnungen des ersten Teils wird im folgenden nur darin abgewichen, daß der untere Index 0 nicht mehr den Grundzustand, sondern die Größen desjenigen Systems bezeichnet, in dem das gestoßene Elektron anfangs ruht.  $v_1^0$  bedeutet die Geschwindigkeit des stoßenden Elektrons vor dem Stoß. Größen ohne jeden Index beziehen sich auf das gestoßene Elektron vor dem Stoß in demjenigen System, in dem es die Geschwindigkeit  $v (|v| = \beta c)$  hat.  $\alpha$  ist der Winkel zwischen  $v_1^0$  und  $v$ ,  $\alpha'(\alpha')$  der zwischen  $v_1'(p_2)$  und  $v$ . Weil nun in unserem Limes die Winkel zwischen  $v_1'(p_2)$  und  $v_1^0$  gegen Null gehen, so gilt  $\alpha' \rightarrow \alpha$  und  $\alpha' \rightarrow \alpha$ .

Von den möglichen Definitionen des Wirkungsquerschnitts bewegter Elektronen sei die folgende, für ein Wellenpaket, dessen Schwerpunkt ruht, geeignete gewählt:

$$(1) \quad B d \Omega = \frac{N_2'}{J_1^0 t},$$

dabei ist  $N_2'$  die Zahl der Elektronen, die während der Zeit  $t$  in den Raumwinkel  $d \Omega$  gestreut werden,  $J_1^0$  der Strom der stoßenden Elektronen. Die Transformationsformeln für Zeit und Strom sind:

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} J_{10}^0 = J_1^0 \sqrt{\frac{(1 - \beta \cos \alpha)^2 + 2\beta \cos \alpha \left(1 - \frac{c}{v_1^0}\right) + \beta^2 \left(\frac{c^2}{v_1^0} - 1\right)}{1 - \beta^2}} \\ \qquad \qquad \qquad \rightarrow J_1^0 \frac{1 - \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \left( \text{da } v_1^0 - c = c \left( \sqrt{1 - \left(\frac{m c^2}{E_1^0}\right)^2} - 1 \right) \rightarrow 0 \right), \end{array} \right.$$

$$(3) \quad t_0 = t \sqrt{1 - \beta^2},$$

somit gilt:

$$(4) \quad B_0 d \Omega_0 = \frac{N_{20}'}{J_{10}^0 t_0} = \frac{1}{1 - \beta \cos \alpha} B d \Omega.$$

Über den Anfangsimpuls des gestoßenen Elektrons soll vorausgesetzt werden, daß er  $\leq m c$  ist. Dann liegt im Ruhssystem derselbe Grenzfall vor wie im ursprünglichen, es gilt z. B.

$$(5) \quad E_{10}^0 = E_1^0 \frac{1 - \beta \frac{v_1^0}{c} \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}} > E_1^0 (1 - \beta) \rightarrow \infty,$$

und damit auch  $p_{10}^0 \rightarrow \infty$ ,  $v_{10}^0 \rightarrow c$ .

Ebenso beweist man, daß auch

$$(6) \quad Q_0 = E_{20}' - m_0 c^2 \rightarrow \infty;$$

1) Bezeichnungen nach Teil I.

2) W. Pauli, *Helv. Phys. Acta*, Vol. VI, Fasc. IV. S. 279. 1933.

3) Chr. Meller, *Ann. d. Phys.* [5] 14. S. 531. 1932. Gl. (76).

ihnen soll.  
eine Ge-  
genstrom-  
Möller  
und dann  
enden nur  
Grund-  
dem das  
beziehen  
System,  
Winkel  
l nun in  
gehen,  
itts be-  
Schwer-

in den  
n Elek-

$\frac{1}{2} - 1$

$\alpha$

gesetz  
unfall

3.

man sieht auch leicht ein, daß

$$(7) \quad \frac{Q_0}{E_{10}^0} \longrightarrow \frac{Q}{E_1^0},$$

da ja alle Elektronen nach dem Stoß in einem beliebig kleinen Winkel zur Einfallsrichtung der stoßenden Elektronen herausfliegen. Die Mellersche Formel für den Wirkungsquerschnitt ruhender Elektronen für das Intervall  $dQ_0$  der abgegebenen Energie vereinfacht sich im betrachteten Grenzfall zu:

$$(8) \quad B_0(Q_0) dQ_0 = \frac{2\pi e^4}{m_0 c^2} \frac{dQ_0}{Q_0^2} \left( \frac{1 - A_0(1 - A_0)}{1 - A_0} \right)^2$$

mit

$$(9) \quad A_0 = \frac{Q_0}{E_{10}^0} \longrightarrow \frac{Q}{E_1^0} = A.$$

Aus Teil I entnimmt man (Gl. 10)

$$(10) \quad \cos \Theta_0 \approx 1 - \frac{Q_0 m_0 c^2}{c^2 p_{10}^0 p_{10}^0}$$

für

$$\Theta_0 = \varphi_0 - \varphi_1$$

und kann so auch den Wirkungsquerschnitt pro Raumwinkelement

$$d\Omega_0 = \sin \Theta_0 d\Theta_0 d\varphi_0$$

hinschreiben<sup>1)</sup>, für den dann die oben angegebene einfache Transformationsformel (4) gilt:

$$(11) \quad B_0 d\Omega_0 = \frac{e^4}{m_0 c^2 Q_0^2} \frac{c^2 p_{10}^0 p_{10}^0}{m_0 c^2} \left( \frac{1 - A_0(1 - A_0)}{1 - A_0} \right)^2.$$

Um  $B(Q; \beta) dQ$  zu finden, hat man nun nur noch die Größen des Ruhsystems durch die des ursprünglichen Systems auszudrücken und dann  $d\Omega$  durch  $dQ$  zu ersetzen mittels der aus Teil I Gl. (10) hervorgehenden Beziehung

$$(12) \quad d\Omega = \frac{E dQ}{c^2 p_1^0 p_1^0} (1 - \beta \cos \alpha) d\varphi.$$

In unserem Limes vereinfachen sich die Beziehungen zwischen den Größen des Ruhsystems und denen des ursprünglichen wesentlich. So gilt:

$$(13) \quad p_{10}^0 d\Omega_0 \longrightarrow p_1' d\Omega,$$

$$(14) \quad Q_0 \longrightarrow \frac{1 - \beta \cos \alpha}{\sqrt{1 - \beta^2}},$$

und

$$(15) \quad \frac{p_1' p_{10}^0}{p_{10}^0 p_1^0} \longrightarrow 1.$$

So ergibt sich schließlich nach Einsetzen der Werte aus Gl. (9), (11)–(14), wobei die Abhängigkeit von  $\alpha$  herausfällt, als Wirkungsquerschnitt

1) Wegen der Axialsymmetrie des Stoßprozesses im Ruhsystem kann man die Integration über das Azimut  $\varphi_0$  rückgängig machen und statt  $2\pi: d\varphi_0$  schreiben.

des isotropen Wellenpakets aus Elektronen der Geschwindigkeit  $\beta$ , pro Elektron der Wert

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{B(Q; \beta) d\Omega}{m_0 c^3} = \frac{2\pi e^4}{Q^2} \frac{dQ}{\left(\frac{1-A(1-A)}{1-A}\right)^2} \sqrt{1-\beta^2} \\ = B(Q; 0) dQ \sqrt{1-\beta^2}. \end{array} \right.$$

Der Faktor, der durch die Geschwindigkeit der gestoßenen Elektronen zum Wirkungsquerschnitt hinzutritt, stimmt mit dem überein, der aus der Arbeit von W. Pauli<sup>1)</sup> hervorgeht, wenn man berücksichtigt, daß diese Arbeit von einer anderen Definition des Wirkungsquerschnittes ausgeht, die von der hier benutzten gerade um den Faktor  $D = 1 - \beta \cos \alpha$  abweicht<sup>2)</sup>. Mit diesem muß man die dort berechnete Größe  $S_{\nu'} \cdot d\nu'$  noch multiplizieren, wenn der Schwerpunkt des streuenden Wellenpaketes ruht. — Daß sich der Wirkungsquerschnitt des Wellenpaketes von dem des Elektrons im Atom schon in dem Glied mit  $\left(\frac{Z}{137}\right)^2$  unterscheidet, sogar in bezug auf dessen Vorzeichen, wenn man zum Vergleich  $\beta = \frac{Z}{137}$  setzt, ist nicht verwunderlich, da ja das freie Elektron die Energie  $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$  hat, während für das gebundene

die Energie des Grundzustandes im Atom  $m_0 c^2 \sqrt{1 - \left(\frac{Z}{137}\right)^2}$  in die Rechnung eingeht.

Zum Schluß möchte ich Herrn Prof. Dr. Heisenberg für die Stellung des Problems und viele Ratschläge bei seiner Bearbeitung herzlich danken. Herrn Prof. Dr. F. Bloch und Herrn Dr. Sauter danke ich für anregende Diskussionen.

1) W. Pauli, a. a. O.

2) W. Pauli, a. a. O., S. 280, 281; H. Casimir, *Helv. Phys. Acta*, Vol. VI, Fasc. IV, S. 279. 1933; dort S. 303.

Leipzig, Inst. für theoretische Physik an der Universität.

(Eingegangen 23. Oktober 1934)

—

in e  
schied  
(50 L  
groß  
Probl  
well  
R. F  
spie  
den  
auch  
Sau  
lust  
bre  
für  
bei  
bei  
lust  
die  
ein  
(1)

(2)

v  
die  
un  
da  
un

gkeit  $\beta$  $-\beta^2$  $\beta^2$ 

en Elek-

überein,

berück-

irkungs-

um den

dort be-

ankt des

erschnitt

m Glied

n, wenn

a ja das

oundene

in die

nberg

seiner

h und

en.

s. Acta,

rsität.

## Die Dämpfungsverluste bei starken Schallschwingungen in Rohren

Von K. O. Lehmann

(Mit 12 Figuren)

Durch Beobachtung von stationären Schallschwingungen in einem weiten Rohr soll die Größe der Verluste für verschiedene Gase (Luft und Kohlensäure) bei niedriger Frequenz (50 Hz) experimentell ermittelt und ihr Verlauf bis zu sehr großen Schallamplituden untersucht werden.

Die Kenntnis der Dämpfung in Rohren ist für vielartige Probleme wichtig. Die Bildung der Wellenfront von Detonationswellen hängt in wesentlicher Weise von der Reibung ab, wie R. Becker<sup>1)</sup> nachwies. Bei sämtlichen Kolbenkraftmaschinen spielen die Schwingungen im Ansauge- und Auspuffrohr bei den kritischen Drehzahlen eine wesentliche Rolle<sup>2)</sup>, besonders auch bei Kompressoren<sup>3)</sup> haben die Schwingungen in längeren Saugleitungen oft entscheidenden Einfluß auf zusätzlichen Verlust oder Gewinn an Förderleistung. Bei indirekten Luftdruckbremsen<sup>4)</sup> und bei langen Rohrpostleitungen<sup>5)</sup> ist die Dämpfung für die Berechnung des Ausgleichstoßes von Bedeutung. Auch bei Trichterlautsprechern<sup>6)</sup> treten an der Membran Drucke auf, bei denen der Klirrfaktor nur unter Berücksichtigung der Verluste angegeben werden kann.

Für die theoretische Behandlung dieser Vorgänge fehlt die Kenntnis der vier Konstanten, die die Differentialgleichungen einer ebenen Kontinuumschwingung bestimmen:

$$(1) \quad - \frac{\partial p}{\partial x} = Rv + L \frac{\partial v}{\partial t},$$

$$(2) \quad - \frac{\partial v}{\partial x} = A p + C \frac{\partial p}{\partial t}.$$

$v$  ist der Momentanwert der Geschwindigkeit der Teilchen, die Schallschnelle,  $p$  der des Schalldrucks.  $C$  ist die elastische und  $L$  die Trägheitskonstante. Alle Verluste bestehen schließlich darin, daß regelmäßige Bewegungen oder Zustände in Zustände ungeordneter Bewegungen der Moleküle übergehen. Ein Teil

der Verluste ist aber durch den Strömungswiderstand  $R$  nur von der Geschwindigkeit der Teilchen abhängig, wie die Reibung an den Rohrwänden und die Zerstreuung durch konvektive und turbulente Strömungsvorgänge<sup>7)</sup>. Ein anderer Teil ist durch  $A$  nur abhängig von der Höhe des Wechseldruckes, nämlich die Verluste durch die Wärmeableitung und durch mechanische und thermische Abstrahlung, z. B. durch die Nachgiebigkeit der Rohrwände.

Die Werte, die für die Verluste auf Grund elementarer Annahmen über den zeitlichen Ausgleichsvorgang der Wechselwirkungen zwischen den einzelnen Raumgebieten und Wandgebieten berechnet wurden<sup>8)</sup>, stimmen mit den bisherigen Messungen bei kleiner Amplitude und hoher Frequenz großenteilsmäßig überein. Für tiefe Frequenzen, die wegen der Ableitung eine Abweichung von der Theorie erwarten lassen, sind dagegen weitere Messungen der Verluste und Aufschlüsse über das Verhältnis ihrer geschwindigkeits- und druckabhängigen Komponente nötig.

#### Wahl der Meßmethode

Zur Entwicklung von Meßmethoden bei periodischen Vorgängen lassen sich die Grundgleichungen in analoger Weise wie für Vorgänge an elektrischen Leitungen verwenden. Die dort üblichen Verfahren laufen grundsätzlich darauf hinaus, Messungen bei zwei verschiedenen Betriebszuständen auszunützen, die sich durch eine Verstimmung, d. h. Veränderung des Verhältnisses der Leitungslänge zur Wellenlänge unterscheiden<sup>9)</sup>. Z. B. werden bei der bekannten „Kurzschlußleeraufmethode“<sup>10)</sup> die Eingangsgrößen bei offenem und geschlossenem Leitungsende gemessen. Tischner<sup>11)</sup> erreicht prinzipiell bei Schallschwingungen in einem Rohr die gleichen Bedingungen durch starren Abschluß und durch Abschluß mit einem Verlängerungsrohr von  $1/4$  Wellenlänge. Im vorliegenden Fall sollen Schallschwingungen ungewöhnlich großer Amplituden untersucht werden, die nur bei Resonanzabstimmung erzielt werden können. Die Messung in einem andern, also verstimmten Betriebszustand, läßt sich dann nur bei sehr viel kleinerer Amplitude durchführen, da die Resonanzkurven spitz sind. Zur Beobachtung eines Amplitudenganges sind aber diese Methoden ungeeignet, weil zu einer Auswertung Messungen an je zwei sehr verschiedenen starken Schwingungen verwendet werden müßten.

An einem festgegebenen Rohr, das am Rohranfang erregt wird, sind aber nur die folgenden Meßgrößen verfügbar: am

Rohranfang die Amplitude des Drucks  $P_a$ , die Amplitude der Schallschnelle  $V_a$ , der Phasenwinkel  $\xi$  zwischen Druck und Schnelle und am Rohrende die Amplitude des Drucks  $P_e$ , der Phasenwinkel  $\mu$  zwischen den Drucken am Rohranfang und Rohrende. Die Amplitude der Schallschnelle am Rohrende,  $V_e$ , lässt sich nicht wie im elektrischen Falle einfach und genau messen. Wir schreiben sie daher zweckmäßig vor, indem wir durch starren Rohrabschluß  $V_e = 0$  machen.

In der Darstellung periodischer Vorgänge (Kreisfrequenz  $\omega$ ) treten  $R$ ,  $A$ ,  $L$  und  $C$  stets in wiederkehrenden Ausdrücken zusammen, die mit den Meßgrößen unmittelbaren Zusammenhang haben<sup>12)</sup>. Die wegen  $R$  und  $A$  auftretenden Gesamtverluste pro Einheit der Rohrlänge  $l$  werden üblicherweise durch die Dämpfungskonstante  $\beta$  bzw. das Dämpfungsmaß  $\beta l$  charakterisiert, wobei

$$(3) \quad \beta l \approx \frac{Rl}{2} \sqrt{\frac{C}{L}} + \frac{Al}{2} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

ist, wenn wie im hier stets vorliegenden Fall

$$\frac{R}{\omega L} \quad \text{und} \quad \frac{A}{\omega C} \ll 1$$

ist. Ähnlich wird das sogenannte Winkelmaß

$$(4) \quad \alpha l \approx \omega l \sqrt{LC}$$

durch die Meßgrößen unmittelbar beeinflußt.

Andere wiederkehrende Ausdrücke sind die Amplitude

$$Z = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

und der kleine Phasenwinkel  $\zeta$  des sogenannten Wellenwiderstands<sup>\*)</sup>  $\mathfrak{Z} = \sqrt{\frac{R + i \omega L}{A + i \omega C}}$ .

$\beta l$  und  $\alpha l$  können nun einerseits durch das Verhältnis  $P_a/V_a$  und  $\xi$ , andererseits durch  $P_a/P_e$  und  $\mu$  dargestellt werden. Es ist<sup>\*\*)</sup>:

<sup>\*)</sup> In der Literatur auch „akustische Impedanz“ genannt. Hier ist zur Unterscheidung von der Rohrimpedanz der strenge Ausdruck beibehalten.

<sup>\*\*)</sup> Bei einwelligen Vorgängen werden die Gl. (1) und (2) durch Einführen der komplexen Amplituden  $\mathfrak{P}$  und  $\mathfrak{V}$  besonders einfach.

Für die Werte am Anfang und Ende des Rohres erhält man durch bekannte Umformung<sup>13)</sup>

$$\mathfrak{P}_a = \mathfrak{P}_e \cos(\beta + i \alpha) l + \mathfrak{Z} \mathfrak{V}_e \sin(\beta + i \alpha) l,$$

$$\mathfrak{V}_a = \mathfrak{V}_e \cos(\beta + i \alpha) l + \frac{\mathfrak{P}_e}{\mathfrak{Z}} \sin(\beta + i \alpha) l.$$

$$(5) \quad \frac{P_a}{V_a} = Z \sqrt{\frac{\sin^2 \beta l + \cos^2 \alpha l}{\sin^2 \beta l + \sin^2 \alpha l}},$$

$$(6) \quad \xi = \zeta + \arctg \frac{\sin \beta l \cdot \sin \alpha l}{\operatorname{Cof} \beta l \cdot \cos \alpha l} - \arctg \frac{\operatorname{Cof} \beta l \sin \alpha l}{\sin \beta l \cos \alpha l}$$

und

$$(7) \quad \frac{P_a}{P_e} = \sqrt{\sin^2 \beta l + \cos^2 \alpha l},$$

$$(8) \quad \mu = \arctg \frac{\sin \beta l \sin \alpha l}{\operatorname{Cof} \beta l \cos \alpha l}.$$

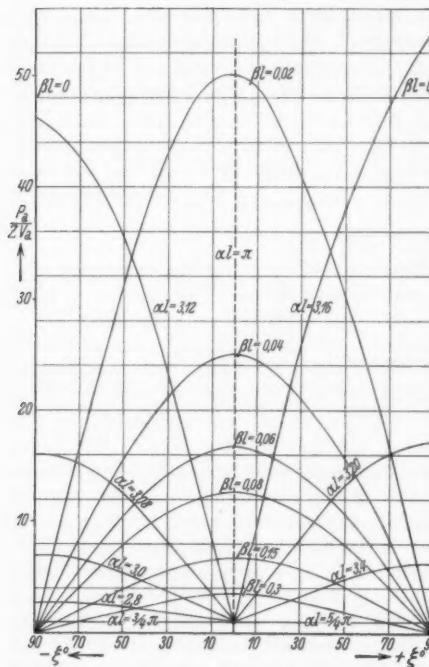


Fig. 1

Eine Diskussion dieser Gleichungen zur Wahl der Meßmethode daraufhin, welche Meßwerte auf  $\beta l$  bzw.  $\alpha l$  empfindlich reagieren, ist nur sinnvoll, wenn man für den Zahlenwert  $\beta l$  schon bestimmte Grenzen angeben kann. Am klarsten werden die Verhältnisse an Hand der Figg. 1 und 2 übersehen.

In Fig. 1 sind die Linien gleicher Dämpfung und gleichen Winkelmaßes unter Weglassung des kleinen Winkels  $\zeta$  in der  $\frac{P_a}{ZV_a}$ ,  $\xi$ -Ebene aufgezeichnet. Große Amplituden erreicht man bekanntlich nur in der Nähe von  $\alpha l = \pi$ , also  $\xi \approx 0$ .

Für starr abgeschlossenes Rohrende ist  $\mathfrak{B}_e = 0$ , also:

$$\frac{\mathfrak{P}_a}{\mathfrak{B}_a} = 3 \frac{\operatorname{Cof}(\beta + i \alpha) l}{\sin(\beta + i \alpha) l}, \quad \frac{\mathfrak{P}_a}{\mathfrak{B}_e} = \operatorname{Cof}(\beta + i \alpha) l.$$

Daraus ergeben sich durch Trennung der reellen und imaginären Teile die Amplituden und Winkel der Gl. (5) bis (8).

Das Verhältnis  $P_a/ZV_a$ , das für kleine Werte  $\beta l$  annähernd  $1/\beta l$  ist, ändert sich prozentual überall gleich stark mit  $\beta l$ , auch für kleine  $\beta l$ . Die Dämpfung hat auf den Winkel  $\xi$  nur geringen Einfluß, dagegen ändert sich  $\xi$  sehr stark schon für geringe Änderungen von  $\alpha l$ , besonders bei kleinem  $\beta l$ .

Solange etwa  $\beta l < 0,15$  und  $\alpha l \approx \pi$  ist, eignet sich also das Verhältnis  $P_a/V_a$  zur Ermittlung von  $\beta l$  und der Phasenwinkel  $\xi$  zur Ermittlung von  $\alpha l$ .

Fig. 2 zeigt den Verlauf von  $\beta l$  und  $\alpha l$  in der  $\frac{P_a}{P_e}, \mu$ -Ebene.

Für  $\beta l < 0,15$  bringt eine Verschiebung von  $\beta l$  keine beträchtliche Änderung in  $P_a/P_e$  oder  $\mu$  her vor,  $\alpha l$  hat in Resonanznähe ( $\alpha l = \pi$ ) keinen Einfluß auf  $\mu$  und nur geringen auf  $P_a/P_e$ . Für  $\beta l < 0,15$  läßt sich also weder  $\beta l$  noch  $\alpha l$  aus  $P_a/P_e$  oder  $\mu$  genau ermitteln. Für das Gebiet  $\beta l > 0,15$  ist dagegen  $P_a/P_e$  sehr geeignet für die Bestimmung von  $\beta l$ , und  $\mu$  ist brauchbar zur Ermittlung von  $\alpha l$ .

Es ergibt sich somit von selbst eine Teilung der Meßmethodik für Dämpfungen unter  $\beta l \approx 0,15$  und für Dämpfungen über diesem Wert. Wie aus den späteren Messungen folgt, bewegen wir uns bis zu den höchsten Amplituden im Gebiet kleiner Dämpfung. Wir sind also gezwungen,  $\beta l$  durch den sogenannten Eingangsscheinwiderstand  $P_a/V_a$  und  $\alpha l$  durch dessen Phasenwinkel  $\xi$  zu messen und aus Gl. (5) und (6) auszurechnen. Die beiden Gleichungen enthalten noch den Wellenwiderstand  $\beta$ , dessen Messung auch die fehlenden zwei Bedingungen für die Bestimmung der 4 Konstanten er-

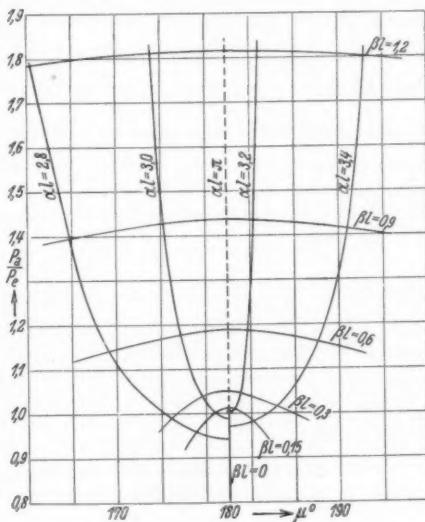


Fig. 2

geben würde<sup>12)</sup>). Leider enthalten aber die noch verfügbaren Meßwerte aus dem komplexen Verhältnis:  $\frac{\mathfrak{P}_a}{\mathfrak{P}_e} = \text{Cos}(\beta + i\alpha)l$  den Wellenwiderstand nicht. Bei kleinem  $\zeta$  und  $\beta l$  lässt sich zwar trotzdem in Resonanznähe  $\alpha l$  durch  $\xi$  sehr genau angeben, aber die Bestimmung  $\beta l$  und seine Trennung in Einzelverluste ist in unserm Fall aus diesen Messungen nicht möglich.

Wir führen zunächst für den Betrag  $Z$  die Hypothese ein, daß für den Fall  $LC = \text{const.}$  auch  $\frac{L}{C} = \text{const.}$  sei, weil sich kein Grund für eine gegenläufige Veränderung von  $L$  gegen  $C$  bei wachsender Amplitude angeben lässt. Aus den nachfolgenden Messungen ergab sich, daß  $\sqrt{LC} = \frac{\alpha l}{\omega l}$  bis zu den höchsten Amplituden völlig konstant ist. Aus dieser Feststellung ergibt sich zwar kein Meßwert für  $\sqrt{\frac{L}{C}}$ , wir dürfen aber daraus vermuten, daß  $Z$  den gleichen Wert wie bei akustischen Amplituden behält. ( $Z = a \cdot \varrho \text{ g/cm}^{-2} \text{ s}^{-1}$ , wobei  $a$  die Fortpflanzungsgeschwindigkeit und  $\varrho$  die Gasdichte ist).

Zur Trennung von  $\beta = \frac{R}{2Z} + \frac{A}{2} Z$  in die Reibungsdämpfung  $\beta_R = \frac{R}{2Z}$  und die Ableitungsdämpfung  $\beta_A = \frac{A}{2} Z$  lässt sich aus der Beobachtung stehender Wellen offenbar keine weitere Bedingung gewinnen. Es bleibt nur übrig, die Aussagen der bestehenden Theorien<sup>8)</sup> an Gasen mit verschiedenen physikalischen Eigenschaften quantitativ nachzuprüfen und zu diskutieren.

#### Die Bestimmung der Dämpfungskonstante $\beta$ und der Winkelkonstante $\alpha$

Am Anfang eines rund 3 m langen, am Ende starr abgeschlossenen Rohres wird durch einen Schallgeber eine Schwingung in Resonanznähe erregt. Im Anschluß an das bekannte akustische Gebiet wird sie durch eine Kolbenmembran, später aber zur Erreichung sehr hoher Amplituden von über 75000 Bar (etwa 80 cm-Wassersäule) durch periodische Luftsöße erzeugt. Gemessen wird der zeitliche Verlauf der Schallschnelle und des Druckes am Rohranfang mit den zugehörigen Phasenwinkeln.

Das Versuchsröhr besteht aus  $2\frac{1}{2}$ -zölligem, schwarzem Gasrohr mit einem lichten Durchmesser von 6,7 cm und 0,4 cm Wandstärke. Es ist aus meterlangen Stücken mit

Muffen zusammengeschraubt und durch Flanschen mit den Rohrköpfen verbunden. Das Rohrinnere ist sauber ausgeputzt, aber nicht poliert.

#### Voruntersuchung bei kleinen Amplituden

Fig. 3 zeigt die Anordnung zur Untersuchung kleiner Amplituden. In üblicher Weise wird der Rohrabsatz  $A$  über eine Kolbenmembran  $M$  mit einem Lautsprecher  $L$  erregt. Die

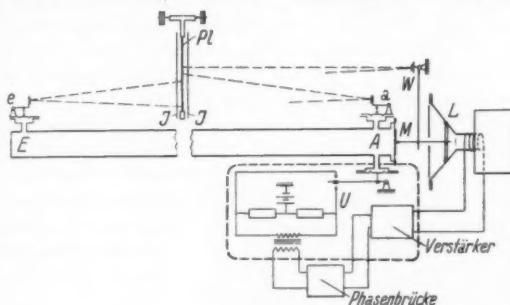


Fig. 3

Membran ist mittels einer 0,3 cm starken, steifen Gummiplatte dicht mit dem Versuchsrohr verbunden. Die Schnelle  $V_a$  erhält man aus der mit dem Spiegel  $W$  photographisch registrierten Kolbenmembranbewegung ( $W_a$  in Fig. 5). Zur Messung der Schalldrucke entschließen wir uns für die Registrierung über Manometermembranen ( $a$  und  $e$ ), da in allen Fällen genügend große Druckkräfte zur Verfügung stehen werden, und die Rückwirkung auf die Rohrkonstanten leicht berücksichtigt werden kann. Die Membranbewegungen werden mittels Lichtzeiger photographisch aufgezeichnet.

Die Phasenwinkel sind nur dann leicht festzustellen, wenn die Druck- und Geschwindigkeitskurven in einem Oszillogramm vereinigt werden. Zur Kontrolle nehmen wir auch den Druck  $P_e$  am Rohrende  $E$  auf. Wir benutzen deshalb eine Registrierplatte  $Pl$ , die in der Rohrmitte senkrecht zur Rohrachse mittels Federkraft durchgeworfen wird. Sie läuft zwischen den vertikalen Schlitzblenden  $J$  hindurch, auf die die Lichtzeiger von beiden Seiten als schmale horizontale Spaltbilder auftauchen.

Die mechanische Ausführung der Schalldruckmeßeinrichtung ist in Fig. 4 angedeutet. Die Manometermembran  $M$

besteht aus gewelltem Neusilberblech von 6,7 cm freiem Durchmesser. Der Druck biegt die Membranen aus und diese Ausschläge werden auf einen drehbaren Spiegel  $Sp$  übertragen.

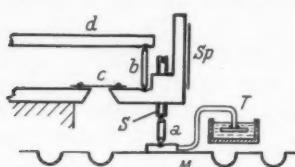


Fig. 4

Besonders wichtig ist dabei, daß alle Reibungskräfte durch die Spitzlagerung  $a$  und die Schneide  $b$  vermieden werden. Das Gelenk  $c$  besteht aus 0,1 mm starkem Stahlblech und verursacht keine Nullpunktsverlagerungen. Die Feder  $d$  hält das Spiegelsystem in guter Verbindung mit der Membran  $M$ . Mit der Schraube  $S$  kann man die gewünschte Nullage einstellen.

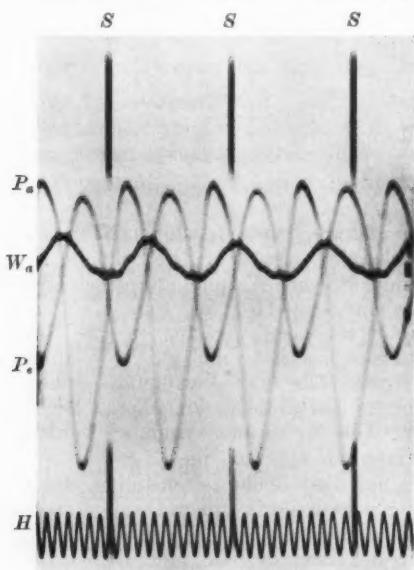


Fig. 5

Die Ausschläge sind durch diese Anordnung vollständig reproduzierbar und praktisch von Nachwirkungsscheinungen frei. Der kleine Öltrog  $T$  dient zur Einstellung der geeigneten Membrandämpfung. In einem Vierversuch wurde die Membran durch einen Taster angestoßen und aus dem oszillographisch beobachteten Abklingvorgang ihre Eigenfrequenz und Dämpfung entnommen.

Fig. 5 stellt ein vollständiges Oszillogramm dar. Außer dem Verlauf von  $P_a$ ,  $P_e$  und  $W_a$  sieht man als Zeitmaßstab am unteren Rand eine Hilfsfrequenzkurve  $H$  von 435 Hz, die gleichzeitig

mittels Stimmgabelgenerator und Membranoszillograph aufgezeichnet wurde. Die senkrechten Striche  $S$  sind Schattenbilder des Blendenschlitzes bei ruhendem Wagen, um die

Lage der Platte in der Kassette für die Kurvenanalyse zu fixieren. Die Punkte  $N$  am rechten Rande sind die Nulllagen der verschiedenen Lichtzeiger. Ihre gegenseitige Verschiebung wird natürlich bei der Bestimmung der Phase in Rechnung gezogen.

Die Aufnahme und besonders die Analyse der Oszillogramme sind sehr zeitraubend. Oft interessiert die Dämpfung  $\beta l$  allein. Falls  $\alpha l - \pi$  klein ist, braucht der Phasenwinkel  $\xi$  für ihre Bestimmung nicht bekannt zu sein (Fig. 1). Wenn  $\alpha l - \pi$  auch noch konstant ist, haben die Kurven für verschiedene Amplituden gleiche Form. Dann können wir den Gang von  $\beta l$  direkt aus den Ausschlägen ablesen.

Die beiden Bedingungen kann man durch die Selbstregung der Luftsäule erzwingen. Die schwingende Säule soll also ein Schaltorgan betätigen, so daß der Druck  $P_a$  die Phase der zugeführten Geschwindigkeit  $V_a$  steuert. Von der Rohrschwingung aus gesehen ist der Winkel  $\xi$  für unsere Voraussetzungen nach Gl. (6):

$$\xi \approx -\frac{\alpha l - \pi}{\beta l} + \zeta.$$

Den gleichen Winkel schreiben wir auch von außen durch die Phase des gestrichelt umrandeten Steuerorgans  $U$  in Fig. 3 vor. Die Phasenbilanz des ganzen Systems heißt dann: Wir nehmen die Geschwindigkeitsamplitude  $V_a$  als vorhanden an. Nach einer Zeit  $\frac{\alpha l - \pi}{\beta l} + \zeta$  erreicht der Druck sein Maximum und das Steuerorgan würde zu dieser Zeit die Amplitude  $V_a$  der Geschwindigkeit hervorrufen. Für stabilen Betrieb muß  $V_a$  aber zur ursprünglich vorausgesetzten Zeit zugeführt werden. Zwischen Steuerorgan und Antriebsmembran müssen wir also eine Phasenbrücke einschalten, die zwischen dem Steuerdruck an  $U$  und der Schallschnelle eben eine Phasenverschiebung  $\xi$  bewirkt, so daß

$$-\frac{\alpha l - \pi}{\beta l} + \zeta - \xi = 0$$

wird; sonst würde die Periodenzahl, die in  $\alpha l$  enthalten ist, nicht aufrecht erhalten bleiben. Für den Fall der Resonanz muß  $\xi = \zeta$ , also sehr klein gemacht werden.

Aus der besonderen Schaltanordnung ergibt sich also die von der Apparatur selbsttätig eingehaltene, mittels einer Phasenbrücke einstellbare Bedingung:

$$\alpha l - \pi = (\zeta - \xi) \beta l.$$

Hiermit erhält man  $\beta l$  aus dem Scheinwiderstand  $P_a/V_a$  aus Gl. (5):

$$(9) \quad \left| \begin{array}{l} \beta l^2 + (\alpha l - \pi)^2 = \left( Z \frac{V_a}{P_a} \right)^2 \\ \beta l = \frac{Z \frac{V_a}{P_a}}{\sqrt{1 + (\zeta - \xi)^2}}. \end{array} \right.$$

Für eine Einstellung der Phasenbrücke:  $\zeta - \xi \ll 1$  wird:

$$\beta l = \frac{Z V_a}{P_a}.$$

Diese Methode ist aber nur anwendbar, wenn der Schallgeber keine ausgeprägte Resonanzstelle in der Nähe der Betriebsfrequenz hat. Dies war bei der eben beschriebenen Versuchsanordnung für kleine Schwingungen der Fall.

Die Ergebnisse der Messungen mit Membranerregung von  $\beta$  sind in Figg. 14 und 15 durch Kreuze angedeutet. Für die in der Akustik üblichen Amplituden beträgt demnach die Dämpfung bei 740 mm Hg Druck und 19° C für Luft

$$\beta = 1,32 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

und für Kohlensäure

$$\beta = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}.$$

*Resonanzkurven.* Die gleiche Versuchsanordnung wurde dazu benutzt, die Resonanzkurve des Versuchsrohrs aufzunehmen, um auf anderem Wege die angegebenen Dämpfungen zu bestätigen. Der Lautsprecher  $L$  (Fig. 3) wird von einer Wechselstrommaschine mit variabler Frequenz von 40 bis 60 Hz betrieben. Die Angabe des Tourenzählers, die mit Zungenfrequenzmesser und Stimmgabelgenerator kontrolliert wurde, wird in Hertz umgerechnet. Die Geschwindigkeitsamplitude der Kolbenmembran  $M$ , d. i. die Anfangsschelle, wird nicht konstant gehalten, sondern zusammen mit dem Druck am Rohranfang photographisch bei ruhender Platte aufgezeichnet. Der Druck am Rohrende wird zur Kontrolle ebenfalls registriert. Alle Ausschläge sind zeitlich weitgehend sinusförmig. Durch die photographische Ablesung konnten sämtliche Werte im gleichen Zeitpunkt gemessen werden, so daß besondere Konstanz der Umlaufzahl nicht gefordert werden mußte. Für jeden neuen Meßwert wurde der Plattenwagen um einige Millimeter verrückt.

Drückt man den Absolutwert von (vgl. Anm. S. 536)

$$\frac{P_a}{V_a} = 3 \frac{\text{Cof}(\beta + i \alpha) l}{\text{Ein}(\beta + i \alpha) l}$$

durch die auf Resonanz bezogenen Werte:

$$\frac{P_a}{P_{ar}} = \delta, \quad \frac{\omega - \omega_r}{\omega_r} = \varDelta \quad \text{und} \quad \frac{\beta_r}{\beta_\omega} = \sqrt{\frac{\omega_r}{\omega}} \approx 1$$

aus, so wird das Dämpfungsmaß:

$$\beta_r l = \pi \cdot \varDelta \sqrt{\frac{\delta^2}{1 - \delta^2}}.$$

Fig. 6 zeigt die gemessene Resonanzkurve für Luft bei der festen Rohrlänge von 303 cm. Die Halbwertsbreite führt zu der Dämpfung

$$\beta = 1,18 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}$$

bei der Resonanzfrequenz 55,55 Hz. Tischner<sup>11)</sup> fand experimentell, daß die Dämpfung proportional  $\sqrt{\omega}$  wächst. Daraus würde sich für

$$\beta = 1,12 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}.$$

Für Kohlensäure ergibt sich die Resonanzkurve auf Fig. 7 für die gleiche Rohrlänge. Die auf 50 Hz reduzierte Dämpfung wird

$$\beta = 1,28 \cdot 10^{-4} \text{ cm}^{-1}.$$

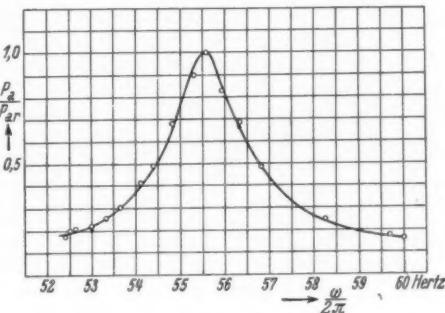


Fig. 6

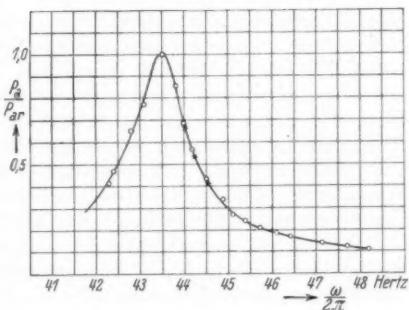


Fig. 7

#### Untersuchung großer Amplituden

Das Hauptziel der Arbeit war die Erreichung extrem hoher Amplituden. Um Schalldrucke zu erreichen, wie sie auf keinen Fall durch Membranerregung erreicht werden können, wird jetzt die Schallenergie durch Luftstöße zugeführt.

*Erzeugung der Schwingung.* Die experimentelle Anlage ist in Fig. 8 nur als Schema aufgezeichnet. Das Rohr muß für unsere Meßmethode an den Enden starr und dicht abgeschlossen sein. Die Stöße werden darum nicht durch rotierende Lochscheiben wie bei einer Sirene, sondern durch ein Ventil am Rohranfang gesteuert, das sich möglichst mit der

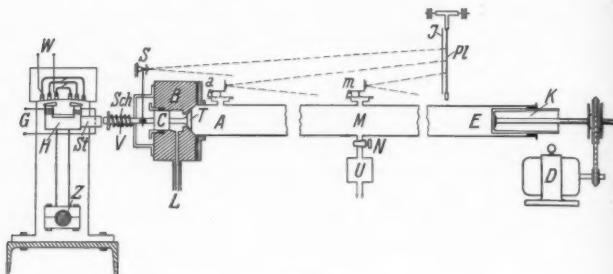


Fig. 8

Resonanzfrequenz öffnet und schließt. Es soll Überdrücke bis zu einigen Atmosphären vollkommen Abdichten und sein Querschnitt muß ähnlich große Dimensionen wie das Versuchsröhr haben, damit die räumlich unebene Ausbreitung der Wellen<sup>13)</sup> am Rohranfang *A* vernachlässigt werden kann. Das ist wie bei einer Verbrennungskraftmaschine nur mit einem eingeschliffenen Kegelventil aus Stahl zu erreichen. Sein Sitz ist sorgfältig in einem schweren Gußeisenblock *B* eingeschliffen, der am Rohranfang *A* angeflanscht ist. Durch den Antrieb wird es in Richtung nach dem Rohrinnern geöffnet. Der Rücktrieb erfolgt durch eine starke Schraubenfeder *Sch*. Der Überdruck gelangt durch eine seitliche Bohrung *L* hinter den Ventilteller *T*. Er versucht das Ventil zu öffnen. Um diesen Übelstand zu vermeiden, ist an den Ventilteller ein dicker, polierter Stahlzylinder *C* angeschweißt, der nach außen leicht beweglich durch eine Stopfbüchse abgedichtet ist. Der Überdruck, der auf den Ventilteller *T* wirkt, ist somit durch den Druck auf den Stahlzylinder kompensiert. Die Druckleitung führt über einen Windkessel zum Reduzierventil einer Bombe, die in dauernder Verbindung mit einem Kompressor steht.

Zur Erzeugung der untersuchten Schwingungen (50 Hz) muß das Ventil in ihrem Rhythmus geöffnet und geschlossen werden, und zwar so, daß sich die Grundwelle der durch die Luftstöße bei *A* entstehenden Schallschnelle messen läßt. Der

Anlage  
hr muß  
icht ab-  
urch ro-  
urch ein  
mit der

zeitliche Geschwindigkeitsverlauf beim Einströmen läßt sich bekanntlich direkt nicht messen. Darum wurden die Zuführungswege so eng bemessen, daß die Luftgeschwindigkeit schon bei kleinen Ventilwegen von der Ventilöffnung selbst unabhängig ist. Wenn sich überdies das Auf- und Zustoßen des Ventils jeweils in sehr kurzer Zeit (in weniger als  $1/1000$  sec) abspielt, wird die Geschwindigkeitskurve praktisch ein Rechteck, dessen Basis aus der Registrierung der Öffnungsduauer und dessen Höhe aus dem sekundlichen Zuflußvolumen hervorgeht.

Die nötigen Beschleunigungs Kräfte für das rasche Öffnen des schweren Ventils erreichen eine Höhe von vielen hundert Kilogramm. Solche Kräfte können nur mit einer hammerartigen Stoßvorrichtung aufgebracht werden, die ihre Energie während der ganzen Periode erhält und sie schlagartig abgibt.

Das Schema der Stoßvorrichtung ist in Fig. 8 hinter der Ventilstange  $V$  zu sehen. Ein 3 kg schwerer eiserner Hammer  $H$  ist auf einem 30 cm langen Stiel fest auf einer doppelseitig eingespannten Torsionswelle  $Z$  aus Federstahl von 30 mm Durchmesser befestigt. Um den Hammer in Schwingungen von mehreren Millimetern Amplituden zu versetzen, wird das System mechanisch auf die Betriebsfrequenz abgestimmt. Die Länge des Torsionsstabes betrug auf beiden Seiten je etwa 80 cm. Die Enden des Stabes sind mit schweren Eisenarmaturen im Betonfundament verankert.

Zur elektromagnetischen Erregung ist der Hammer  $H$  als hufeisenförmiger Feldmagnet ausgebildet, dessen Wicklung  $G$  mit Gleichstrom gespeist wird. Die gegenüberliegende Ankerwicklung  $W$  ist in die Nuten eines feststehenden lamellierten Eisenkernes eingebettet und wird mit 50 Perioden Wechselstrom gespeist. Beim Schwingen stößt der Stutzen  $St$  in jeder Periode einmal auf das gehärtete Ende der Ventilstange  $V$ . Das aufgestoßene Ventil läßt ein vom Druck im Windkessel abhängiges Luftvolumen in das Versuchsröhr eintreten und regt damit eine 50periodische Schwingung an. Damit bei der gegebenen Anregung möglichst hohe Schallamplituden erreicht werden, ist es nötig, die Rohrlänge mittels des beweglichen Rohrabschlusses bei  $E$  auf Resonanz der Grundwelle abzustimmen. Zur schnellen Einstellung wird der Kolben  $K$  über eine Schraubspindel durch den Motor  $D$  als Abschlußwand verschoben. Im Druckknoten  $M$  wird die durch die Anregungsstöße zugeführte Luftmenge ohne Beeinflussungen der Grundwelle durch den Hahn  $N$  abgeführt. Die Größe des Druckes in der Rohrmitte (Rohrdruck) wird durch die Hahnöffnung eingestellt.

*Messung.* Wegen der erwähnten raschen Öffnung der engen Zuleitungswege erhält die Geschwindigkeitskurve  $V$  in Fig. 9 bei beliebigem Verlauf der Ventilbewegung  $W$  eine

Rechteckform. Die Anfangsschnelle wird also:

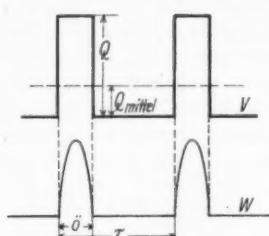


Fig. 9

wobei  $Q_{\text{mittel}}$  das sekundlich zugeführte Gasvolumen,  $F$  den Rohrquerschnitt,  $k_1$  den Fourierkoeffizienten der Grundwelle der Kurve  $V$  mit der Öffnungszeit  $\ddot{o}$  und der Periode  $\tau$

bedeutet.

Die Öffnungszeit wird aus dem Ventilweg  $W$  in Fig. 10 entnommen, der mittels des Spiegels  $S$  (Fig. 8) zusammen mit den anderen Meßgrößen oszillographiert wird.

Der Druck am Rohranfang,  $P_a$  in Fig. 10, wird wieder mit einer Membran oszillographiert, die aber gegenüber den bisherigen Versuchen durch eine viel unempfindlichere ersetzt wird. Der Druckverlauf am Abflusshahn (Kurve  $P_m$  in Fig. 10) wird ebenfalls registriert, um einen eventuell nach außen abgeleiteten Anteil der Grundwellenleistung bei der Berechnung von  $V_a$  zu berücksichtigen.

Zur Auswertung dürfen die Gl. (5) und (6) vereinfacht werden, weil  $\beta l \ll 1$  ist und die Rohrlänge fast vollkommen auf Resonanz eingestellt wird. Es ist sehr genau:

$$\beta l = \frac{Z \cdot V_a}{P_a} \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi}},$$

$$\alpha l = \pi + \frac{Z \cdot V_a}{P_a} \frac{\operatorname{tg} \xi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \xi}}.$$

Aus den Oszillogrammen sind die Werte für die Grundwellen  $P_a$ ,  $V_a$  und  $\xi$  durch Fourieranalyse zu gewinnen. Die Ausschläge einiger Druckmembranen sind für Unter- und Überdruck nicht symmetrisch. Sie müssen also mittels Eichkurven umgewertet werden. Aus diesem Grunde wurden die Fourierkoeffizienten graphisch bestimmt. Durch die endliche Eigenfrequenz  $\omega_0$  der Membranen müssen die Ausschläge

noch mit  $\sqrt{\frac{1}{\left(\frac{\omega_0^2 - \omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + 4\delta \frac{\omega^2}{\omega_0^4}}}$  multipliziert werden, wobei  $\delta$

die Membrandämpfung bedeutet. Im Phasenwinkel erscheinen die Phasennullpunktskorrekturen (Fig. 10 am linken Rand) der Lichtzeiger infolge des schrägen Lichteinfalls auf den

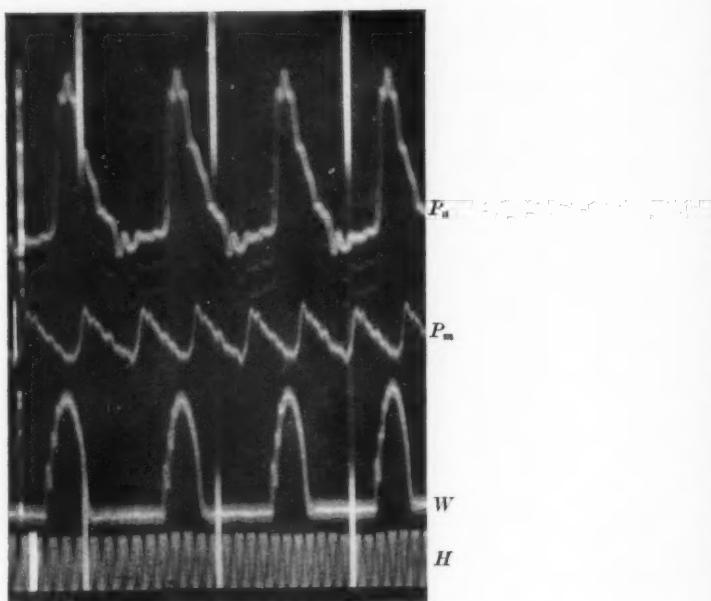


Fig. 10. Oszillogramm für Erregung durch periodische Luftstöße

Blendschlitz. Die zugeführte Luft ist infolge Vorkomprimierung in einer Vorlage auf 100 at völlig trocken. Die Kohlensäure wurde einer handelsüblichen Bombe entnommen. In beiden Fällen wurde das Rohr vor den Messungen ausgiebig durchgespült. Für die mittlere Versuchstemperatur  $19^{\circ}\text{C}$  und den Barometerstand 740 mm Hg wurde der Wellenwiderstand für Luft  $Z = 40,0$ , für Kohlensäure 48,4 angenommen.

#### Meßergebnisse

Das Ergebnis der Analysen der Oszillogramme ist in Tab. 1 für Luft und in Tab. 2 für Kohlensäure zusammengestellt, jedesmal für 3 Rohrdrücke (Drucke in der Rohrmitte). Figg. 11 und 12 zeigen den Verlauf der Dämpfung abhängig

vom Schalldruck am Rohranfang. Im Anfang bleibt die Dämpfung in allen 6 Kurven, soweit man sehen kann, konstant,

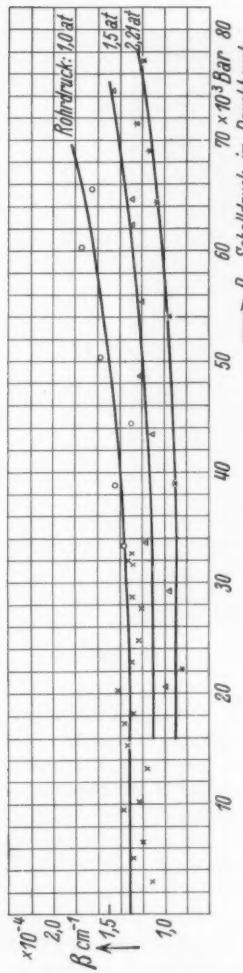


Fig. 11. Dämpfung bei Luft

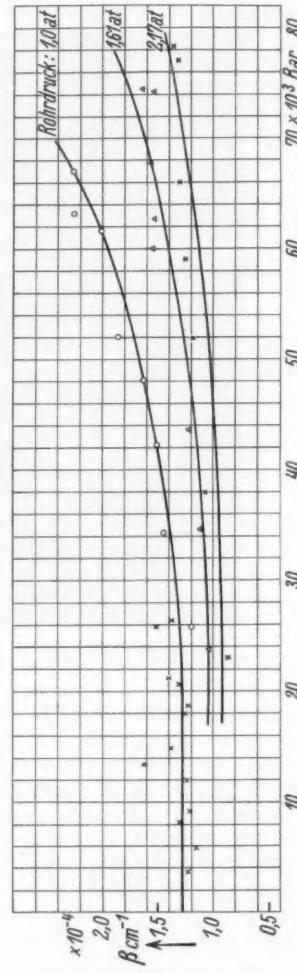


Fig. 12. Dämpfung bei Kohlensäure

erst bei etwa 30000 Bar beginnt sie merklich zu steigen. Das erklärt sich durch den Eintritt turbulenter Bewegungen. Die

Tabelle 1  
Meßergebnisse für Luft

$P_a$ Bar $\pm 1,3 \cdot 10^3$	$V_a$ cm/sec $\pm 5\%$	$\xi^0 \pm 5^\circ$	$\beta \text{ cm}^{-1} \pm \%$	$\alpha \text{ cm}^{-1} \pm \%$
Rohrdruck 1,0 at				
33,6 $\cdot 10^3$	38,4	+	9,3	$1,36 \cdot 10^{-4} \pm 10$
39,0	46,8	+	6,9	9
44,6	48,4	-	1,0	9
50,5	66,0		0	9
60,3	88,2	-	5,0	8
65,6	89,9	-	7,9	8
Rohrdruck 1,5 at				
20,8 $\cdot 10^3$	12,0	+	16,6	$0,99 \cdot 10^{-4} \pm 12$
33,7	22,9	+	19,5	10
43,5	28,2	+	14,8	9
48,6	34,5	+	12,2	9
62,3	46,5	+	20,1	8
64,6	48,8	+	8,3	8
29,3	15,6	-	1,1	10
55,4	37,3	+	3,7	8
74,5	60,9	-	0,5	8
Rohrdruck 2,21 at				
22,3 $\cdot 10^3$	17,6	-	30,0	$0,84 \cdot 10^{-4} \pm 12$
39,1	14,4	-	17,8	9
54,2	20,9	-	16,2	8
64,5	27,7	-	16,3	8
69,1	31,7	-	16,2	8
71,6	35,8	-	26,1	8
77,3	37,2	-	20,3	8

Schallschnelle im Geschwindigkeitsbauch beträgt bei 30000 Bar Schalldruck etwa 8 m/sec. Aus der Reynoldsschen Zahl<sup>14)</sup>  $R_d = 2320$  ergibt sich, daß in einem runden Rohr vom Durchmesser  $d = 6,7$  cm für ein Gas von der Dichte  $\rho = 0,0012$  und dem Reibungskoeffizienten  $\eta = 0,00019$  die Turbulenz bei der kritischen Geschwindigkeit

$$v = R_d \frac{\eta}{\rho \cdot d} = 0,45 \text{ m/sec}$$

intreten könnte. Es scheint, daß die Turbulenz bei Schwingungen erst sehr viel später eintritt als bei stationären Strömen.

Die Winkelkonstante  $\alpha$  ist in allen Fällen bis zu den höchsten Amplituden vollkommen konstant. Es ist also

Tabelle 2  
Meßergebnisse für Kohlensäure

$P_a$ Bar $\pm 1,3 \cdot 10^3$	$V_a$ cm/sec $\pm 5\%$	$\xi^0 \pm 5^0$	$\beta \text{ cm}^{-1} \pm \%$	$\alpha \text{ cm}^{-1} \pm \%$
Rohrdruck 1,0 at				
25,8 $\cdot 10^3$	16,8	+ 3,5	$1,20 \cdot 10^{-4} \pm 11$	$1,201 \cdot 10^{-2} \pm 0,5$
34,4	26,9	- 7,5	1,45	1,202
42,3	35,1	+ 5,2	1,53	9 1,201
48,2	42,7	+ 4,7	1,63	9 1,201
52,1	52,5	+ 5,9	1,86	8 1,202
61,6	67,0	+ 2,7	2,01	8 1,201
63,2	77,0	+ 4,9	2,25	8 1,202
67,0	81,9	+ 3,6	2,26	8 1,201
Rohrdruck 1,61 at				
23,8 $\cdot 10^3$	8,7	+ 17,6	$1,04 \cdot 10^{-4} \pm 11$	$1,203 \cdot 10^{-2} \pm 0,5$
34,7	13,6	+ 10,8	1,12	10 1,202
43,7	18,9	+ 12,4	1,23	9 1,203
60,3	33,0	+ 23,8	1,55	8 1,207
62,6	33,7	+ 17,2	1,53	8 1,205
67,6	37,7	+ 21,7	1,58	8 1,206
74,2	39,9	+ 15,9	1,53	8 1,204
74,4	42,9	+ 20,7	1,64	8 1,206
Rohrdruck 2,17 at				
23,0 $\cdot 10^3$	5,3	+ 14,6	$0,87 \cdot 10^{-4} \pm 12$	$1,202 \cdot 10^{-2} \pm 0,5$
38,0	11,3	+ 22,0	1,08	9 1,204
51,9	16,4	+ 23,5	1,18	8 1,205
59,1	19,8	+ 20,5	1,25	8 1,205
66,0	22,9	+ 20,1	1,30	8 1,205
77,1	27,1	+ 22,3	1,31	8 1,205
78,3	28,5	+ 21,2	1,36	8 1,205

selbst bei Schalldrucken von 75000 Bar noch nicht notwendig, quadratische Glieder bei der Entwicklung zu berücksichtigen.

Wenn es richtig ist, daß bei den kleineren Schalldrucken noch keine Turbulenz eintritt, so muß sich die Dämpfungs- konstante nach Kirchhoff<sup>8)</sup> bei der inneren Reibung  $\eta$  und der Wärmeleitung  $\lambda$  theoretisch berechnen zu

$$\beta_R + \beta_A = \sqrt{\frac{2\omega}{\varrho}} \frac{1}{a \cdot d} \left[ \sqrt{\eta} + \left( \sqrt{\lambda} - \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \right) \sqrt{\frac{\lambda}{c_v}} \right].$$

In der Tat zeigen die Beobachtungen, daß die Dämpfung sich wie  $\frac{1}{\sqrt{\varrho}}$  ändert. Es ist bei 30000 Bar für:

Rohrdruck	$\beta \text{ cm}^{-1}$	$\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$	$\beta \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$
<b>L u f t</b>			
1,0	$1,35 \cdot 10^{-4}$	1	1,35
1,5	1,11	1,23	1,35
2,21	0,89	1,49	1,33
<b>K o h l e n s ä u r e</b>			
1,0	$1,34 \cdot 10^{-4}$	1	1,34
1,61	1,06	1,27	1,35
2,17	0,94	1,47	1,38

Zu der so berechneten Dämpfung tritt jedoch noch ein weiteres Glied hinzu, weil am Rohranfang und -ende gewisse Undichtigkeiten unvermeidlich sind. Der kleine Luftaustausch durch die Undichtigkeiten bei den verschiedenen Drucken bringt einen kleinen Energieverlust mit sich, dem eine Vergrößerung ( $\beta_u$ ) des beobachteten Wertes  $\beta$  gegen den theoretisch berechneten Wert  $\beta_R + \beta_A$  entspricht:  $\beta = \beta_R + \beta_A + \beta_u$ . Aus der Messung der Abnahme des Druckes bei abgeschlossenem Rohr ergab sich der Undichtigkeitsquerschnitt bei den Aufnahmen für Luft ungefähr zu  $0,15 \text{ mm}^2$ , für Kohlensäure zu  $0,25 \text{ mm}^2$ . Wenn man die theoretisch berechneten Werte den experimentell gefundenen gegenüberstellt:

Rohrdruck	$\beta_R + \beta_A \text{ ber.}$	$\beta \text{ gemessen}$	Differenz
<b>L u f t</b>			
1,0	$0,63 \cdot 10^{-4}$	$1,32 \cdot 10^{-4}$	$0,69 \cdot 10^{-4}$
1,5	0,51	1,11	0,60
2,21	0,42	0,91	0,49
<b>K o h l e n s ä u r e</b>			
1,0	$0,53 \cdot 10^{-4}$	$1,28 \cdot 10^{-4}$	$0,75 \cdot 10^{-4}$
1,61	0,42	1,05	0,63
2,17	0,36	0,92	0,56

so ergeben sich Differenzen, die gegenüber der kleinen Undichtigkeit doch zu groß zu sein scheinen. Nach gewissen Beobachtungen möchte ich schätzen, daß  $\beta_u$  nicht mehr als  $10-20\%$  des beobachteten Wertes ausmacht. Warum die beobachteten Werte so wesentlich größer sind, als die aus der Theorie berechneten, läßt sich vorläufig noch nicht entscheiden. Zur Entscheidung dieser Frage müssen noch weitere Untersuchungen angestellt werden.

**Zusammenfassung**

Durch periodische Luftstöße wurden sehr starke Schall-  
schwingungen mit 50 Hz in einem Rohr von 6,7 cm Durch-  
messer erzeugt und ihre Dämpfung untersucht. Die Schall-  
druckamplitude im Druckbauch der Schwingung konnte bis  
75000 Bar gesteigert werden. Die gleichen Untersuchungen  
wurden mit Kohlensäure vorgenommen.

Die Dämpfungskonstante zeigt bis zu Amplituden von  
30000 Bar kaum einen Anstieg. Darüber steigt sie an infolge  
von Turbulenz.

Die Messungen wurden auch bei größerer Gasdichte  
(Rohrdruck 1,0, 1,5 und 2,2 at) ausgeführt. Bei kleiner  
Amplitude fällt die Rohrdämpfung bei steigendem Rohrdruck  
umgekehrt mit der Wurzel aus der Gasdichte. Die Ergebnisse  
bestätigen darin die Theorie von Helmholtz und Kirchhoff.  
Dagegen steht der absolute Betrag der beobachteten Werte  
von den theoretisch berechneten erheblich ab.

Die Winkelkonstante ist in allen Fällen konstant. Die  
Phasengeschwindigkeit ist von der Amplitude und vom Druck  
im angegebenen Gebiet unabhängig.

Herrn Geheimrat Prof. G. Mie möchte ich für viele wert-  
volle Ratschläge und für sein stets freundliches Interesse an  
der vorliegenden Arbeit meinen ergebensten Dank aussprechen.

**Literaturverzeichnis**

- 1) R. Becker, *Ztschr. f. Phys.* **8**. S. 321. 1922.
- 2) F. Michel, *VDI-Verl.* 1932.
- 3) P. Voissel, *VDI-Forschungsheft* 106.
- 4) F. Hildebrand, *Diss.* Berlin 1927.
- 5) P. R. Arendt, *Elektr. Nachr.-Technik* **9**. S. 112. 1932.
- 6) K. Küpfmüller, *Handbuch der Exp. Physik* Bd. XI. S. 3. 1931.
- 7) L. V. King, *Phil. Mag.* (6) **31**. S. 322. 1916; *Phil. Trans.* **218**. S. 211. 1919; E. N. de C. Andrade, *Proc. Roy. Soc. London* **134**. S. 445. 1931.
- 8) H. Helmholtz, *Crelles Journal* **57**. S. 1. 1860; G. Kirchhoff, *Pogg. Ann.* **134**. S. 177. 1868; Lord Rayleigh, *Theorie des Schalls* Bd. II. S. 372. 1880.
- 9) *Techn. Akustik. Handbuch d. Exp. Physik* Bd. XVII, II. S. 1. 1934.
- 10) F. Breisig, *ETZ.* **20**. S. 194. 1899.
- 11) H. Tischner, *ENT.* **7**. S. 192. 1930; F. Ribbentrop, *Ztschr. f. techn. Phys.* **13**. S. 396. 1932; J. Tröger, *Phys. Ztschr.* **31**. S. 26. 1930.
- 12) F. Breisig, *Theoret. Telegr.* S. 331 u. 340. 1924.
- 13) P. L. Dulong, *Pogg. Ann.* **16**. S. 438. 1829.
- 14) L. Hopf, *Handbuch der Physik* Bd. VII. S. 139.

Freiburg i. Br., Physikalisches Institut der Universität,  
Oktober 1934.

(Eingegangen am 3. November 1934)

die Schall-  
Durch-  
die Schall-  
kunnte bis  
chungen

den von  
n infolge

asdichte  
kleiner  
hrdruck  
gebnisse  
chhoff  
Werte

nt. Die  
Druck

le wert-  
esse an  
brechen.

3. 1931.  
ns. 218.  
45. 1931.  
chhoff,  
s Bd. II.

1. 1934.

Ztschr.  
6. 1930.

ersität,

V  
2  
1  
1  
9  
3  
4  
XU

D  
S  
in  
30  
Ic  
ri  
A  
S  
e  
st  
lo

D  
F  
v  
fr  
w

C  
i

## STABILISATOR

mit einer Stromquelle beliebiger Art gibt eine Spannungskonstanz:  $\pm 0,1\%$  bei  $\pm 10\%$  Primärsschwankungen, 1–2% zwischen Leerlauf und Vollast. 0,02% ist nur die gegenseitige Beeinflussung der Teilspannungen. Trägheitslose Regelung durch Glimmentladung. Eigenverbrauch: Einige Milliampère.

Ausführliche Beschreibungen kostenlos.

STABILOVOLT G.m.b.H., Berlin-Tempelhof, Lorenzweg 1. Tel. Südring 76 30

## Das ultrarote Sonnenspektrum von $\lambda 10\,000$ bis $\lambda 7600$ A.E.

Von Dr. W. Baumann und Dr. R. Mecke, a. o. Professor an der Univ. Heidelberg. III, 56 Seiten mit 6 Tafeln. 1934. 4.— RM. 12.—

Das Buch ist ein Hilfswerk für den Spektroskopiker und eine Ergänzung des bekannten Sonnenatlasses von Rowland. Es bringt auf 6 Tafeln Reproduktionen des Sonnenspektrums im Ultravioletten von  $\lambda 8800$ –7600 und enthält die Wellenlängenmessungen von über 3000 Linien dieses Bezirkes, ergänzt durch Angabe der Frequenzen, Intensitäten und Identifizierung der Linien. Besondere Berücksichtigung fanden die zahlreichen atmosphärischen Linien, die hier 90% des Spektrums ausmachen.

**Astronomische Nachrichten:** Die Ergebnisse einer Ausmessung des langwelligen Teiles des Sonnenspektrums, die die Autoren in dem vorliegenden Heft niedergelegt haben, bilden eine Ergänzung des Standardwerkes von Rowland. Die Tabellen und die bildliche Darstellung des Linienspektrums werden der astrophysikalischen Forschung ein sehr willkommenes Hilfsmittel darbieten für das Studium der Atmosphären der Planeten.

## Astrokalender 1935

In Verbindung mit Dr. Rolf Müller und Dr. Hermann Brück bearbeitet von Richard Sommer. 40 Seiten mit 4 Abbildungen.

1934. gr. 8°.

RM. 3.—

(Sonderdruck aus „Die Sterne“, 1934, Nr. 10/11.)

Der Astrokalender setzt sich die Aufgabe, eine gedrängte Zusammenstellung über die Himmelserscheinungen des Jahres 1935 zu geben, soweit sie für Besitzer kleiner Fernrohre von Bedeutung sein werden. Er bietet die für die Beobachtung der Planetenscheiben erforderlichen Daten sowie eine Ephemeridenauswahl veränderlicher Sterne. Der Sternfreund wird somit ausreichend Anregungen zur Betätigung als Beobachter und Rechner finden.

*Kennen Sie meine Zeitschrift „Die Sterne“?*

*Verlangen Sie bitte kostenlos ein Probeheft und meinen ausführlichen Prospekt „Physik“*

Die Werke können durch jede Buchhandlung bezogen werden

**JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG**

# Einführung in die Physik der Gasentladungen

Von Prof. Dr. **Rudolf Seeliger**, Greifswald

2., umgearb. und erweiterte Aufl. XII, 563 S. mit 243 Fig.  
im Text u. auf 8 Taf. 1934. gr. 8°. RM. 46.—, geb. RM. 48.—

Die neue Auflage im Spiegel wissenschaftlicher Kritik:

**Physikalische Zeitschrift:** Die zweite Auflage dieses nun schon zum Standardwerk der Gasentladungen gewordenen Werkes bringt die Kenntnisse wieder auf den neuesten Stand der Forschung. Man ist dem Verfasser dankbar, daß er als einer der ersten Sachkenner dieses Gebiets aus der Flut der Veröffentlichungen wieder das herausgeholt hat, was besonders wissenschaftlich ist, und es kritisch verarbeitet vorlegt. Am Schlusse befindet sich eine ausgezeichnete Literaturzusammenstellung, von der man wirklich etwas hat, weil sie auch eine kurze kritische Inhaltsangabe und Hinweise auf Verwandtes bringt. Die neue Auflage der „Gasentladungen“ kann jedem Studierenden zur Einführung warm empfohlen werden, aber auch der Forscher und der Ingenieur wird sie mit Vorteil benützen wegen der raschen, kurzen und klaren Orientierung und der sehr eingehenden Literaturhinweise.

**Die Naturwissenschaften:** Daß große Teile der ersten Auflage in fast unveränderter Gestalt in die zweite mit übernommen werden konnten, und nur sehr wenig über Bord geworfen zu werden brauchte, spricht für die Sorgfalt der Abfassung und für einen das Bleibende vom Vergänglichen unterscheidenden Weitblick des Verfassers. Der Anhang verleiht dem Werke eine handbuchartige Note. G. Mierdel, Berlin-Siemensstadt.

**Siemens-Zeitschrift:** Der Verfasser bedient sich in seinem Buche einer überaus klaren, einfachen Ausdrucksweise, die frei ist von allem veralteten Beiwerk. Auf Vollständigkeit der Versuchs-Zahlenwerte ist weniger Wert gelegt als darauf, die Gesetzmäßigkeiten, Grenzen und etwa vorhandene theoretische Schwierigkeiten aufzuzeigen.

Verlangen Sie bitte meinen Prospekt über das Werk  
Es kann durch jede Buchhandlung bezogen werden

JOHANN AMBROSIUS BARTH / VERLAG / LEIPZIG

**Verantwortlich:** für die Redaktion: Prof. Dr. E. Grüneisen, Marburg/L.; für Anzeigen: Bernhard v. Ammon, Leipzig. - Anzeigenannahme: Leipzig C1, Marburgstr. 18 B, Tel. 70861. - Verlag: Johann Ambrosius Barth. - Druck: Metzger & Wittig, Leipzig C1. - DA. 1100 III. VI. 1934. - Printed in Germany.